Các chuyên đề hình học dành cho các bạn THCS(Số 1)

Nguyễn Duy Khương-khoá 1518 chuyên Toán-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

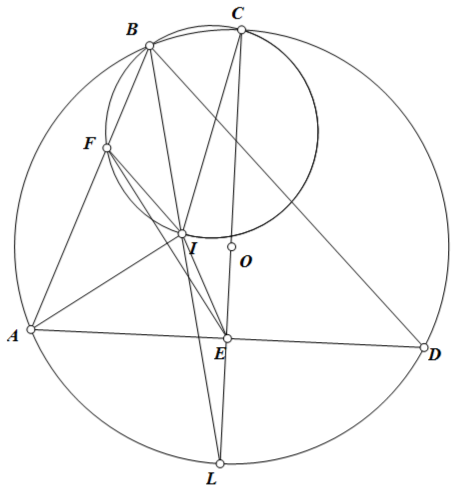
Đôi điều về chuyên mục: Ở chuyên mục mới mở này tôi sẽ trình bày các chuyên đề liên quan tới hình học phẳng qua các kì thi vào lớp 10, thi chọn HSG TP lớp 9. Mỗi tháng tôi sẽ viết một chuyên đề như vậy. Mong các bạn ủng hộ, đặc biệt là các bạn lớp 9 sắp chuẩn bị bước vào kì thi chuyên cam go. Do giới hạn kiến thức cho học sinh lớp 9 rất khó tránh việc các lời giải có lúc sẽ khá là dài(do phải xét nhiều trường hợp hình vẽ khác nhau) mong các bạn, thầy cô thông cảm.

Chuyên đề 1: Kĩ năng biến đổi góc

Khi học hình học phẳng, nói chung là hầu như các bài toán đều có khả năng biến đổi góc được, có điều chúng ta có luyện tập nhiều để biết được các phép cộng góc,cung,... sao cho hợp lí. Để có được kĩ năng này cần phải luyện tập để nhận ra sự móc nối giữa giả thiết và kết luận để tìm ra mấu chốt khi mắc kẹt trong các biến đổi vòng quanh(không đi tới đâu!!!). Ở đây tức là đôi khi ta không thể tìm ra ngay phép biến đổi góc hợp lí, mà cần có cá hình vẽ phụ để kết nối các phép biến đổi với nhau.

Bài toán 1(chọn đội tuyển thi VMO-Hà Nội 2014-2015):

Cho tứ giác $ABCD(AB < BD)$ nội tiếp đường tròn (O) biết $AC = CD$. Gọi I là tâm nội tiếp đường tròn ABD. Gọi (BIC) cắt AB tại điểm thứ hai F. Gọi E là trung điểm AD. Chứng minh rằng: $AI \perp EF$.

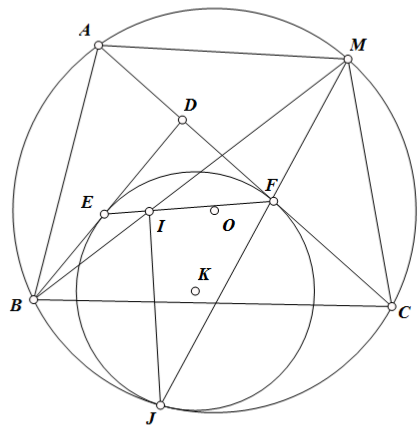


Lời giải: Ta có: $\angle LAI = \dfrac{\angle BAD}{2} + \angle DAL = \dfrac{\angle BAD}{2} + \angle BAI = \angle AIL$ do đó tam giác AIL cân tại L. Chứng minh tương tự ta có: $IL = LD$. Lại có theo hệ thức lượng trong tam giác vuông CDL thì $LD^2 = LE.LC = LI^2$ do đó ta có: $\triangle LEI \sim \triangle CIL(g.g)$. Vậy ta có: $90^\circ + \angle ICB = 90^\circ + \angle IEA$ do đó $\angle ICB = \angle IEA$. Do đó ta thu được tam giác $\angle FIA = \angle EIA$ do đó ta thu được: $\triangle IFA = \triangle IEA(g.c.g)$ do đó hiển nhiên thu được: AI là trung trực EF do đó ta có đpcm

Nhận xét: Bài toán trên không quá khó và thuộc vào phần ăn điểm xong kĩ năng biến đổi góc ở lời giải trên rất hay và quan trọng. Đáng chú ý ở điểm hình vẽ *không như thông thường* đã giúp tiếp cận lời giải dễ hơn.

Ta tiếp tục với bài toán sau.

Bài toán 2(Bổ đề Sawayama Thebault): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy D là 1 điểm nằm trên AC. Dựng đường tròn tiếp xúc DB,DC, (O) tại E, F, J. Chứng minh rằng tâm nội tiếp tam giác ABC nằm trên EF.

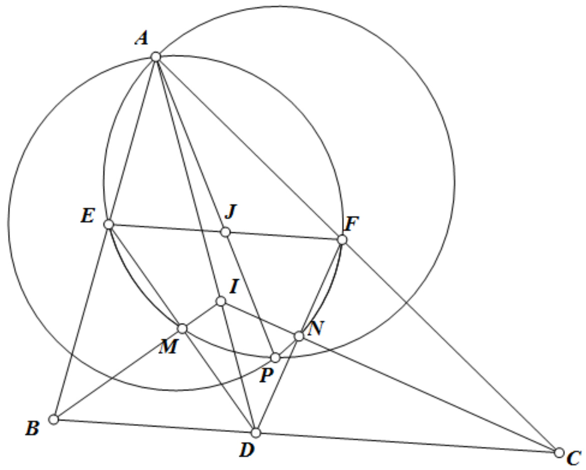


Lời giải: Ta dễ nhận thấy sự việc sau: JF đi qua trung điểm cung AC không chứa B của (O) là điểm M. Gọi I là giao điểm của BM và EF. Kẻ tiếp tuyến Jx với (O). Thế thì: $\angle IBJ = \angle FJx$ suy ra $\angle FEJ = \angle FJx$ do đó $\angle IEJ = \angle IBP$ do đó $IEBP$ nội tiếp $\Rightarrow \angle BEJ = \angle BIJ, \angle EFJ = \angle BEJ$ suy ra $\angle BIJ = \angle EFJ \Rightarrow \angle MIJ = \angle MFI$ vậy $\triangle MIF \sim \triangle MJI(g.g)$ do đó $MI^2 = MP.MF = MB^2 = MC^2$. Vậy thu được M là tâm nội tiếp tam giác ABC. Do đó có được đpcm.

Nhận xét: Bài toán trên là một bổ đề quan trọng với hình học phẳng song ngay cả trong chứng minh cũng có khá nhiều chỗ đề cập tới biến đổi góc khá phức tạp. Đối với học sinh cấp 2 nói chung bài toán này không dễ chút nào.

Trong những năm gần đây, đề thi vào trường chuyên $KHTN$, chuyên *ĐHSP* có rất nhiều bài toán thi ngay từ vòng một đã đánh giá cao khả năng biến đổi góc của người làm.

Bài toán 3(thi Vòng 1 chuyên KHTN 2015-2016): Cho tam giác ABC nhọn không cân có tâm đường tròn nội tiếp I. AI cắt BC tại D. Lấy E, F lần lượt đối xứng D qua IB và IC. M, N, J lần lượt là trung điểm DE, DF, EF. (AEM) cắt (AFN) tại P khác A. Chứng minh rằng A, J, P thẳng hàng.



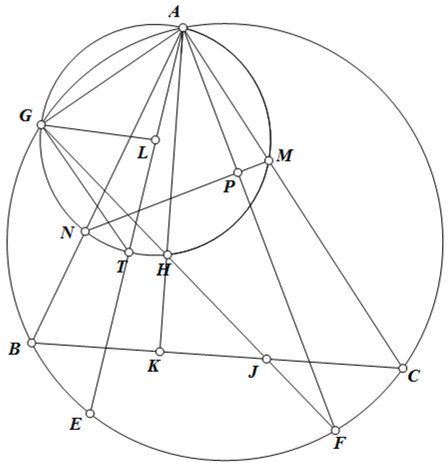
Lời giải: Hiển nhiên rằng E và F lần lượt thuộc AB và AC. Ta có: $\dfrac{AB}{AE} = \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{CF}$ do đó $EF \| BC$ (theo định lí Tháles đảo). Bây giờ ta sẽ chứng minh $MPNJ$ là 1 tứ giác nội tiếp. Thật vậy ta có: MJ, MN, JN lần lượt là các đường trung bình của tam giác DEF do đó ta có:$\angle MJN = \angle EDF$ mà $\angle MPA + \angle EAP = 180°$ đồng thời: $\angle NPA + \angle AFN = 180°$ hay là $\angle MPN = 360° - (\angle AED + \angle AFD) = \angle DEF + \angle DFE = 180° - \angle EDF$(chú ý rằng: $EF \| BC$ nên ED, FD lần lượt là phân giác các góc FEB và EFC) do đó dễ thấy $\angle MJN + \angle MPN = 180°$ hay là M, N, P, J đồng viên. Vậy ta có: $\angle MPJ = \angle MNJ = \angle DEF = \angle EDB = 180° - \angle AED = \angle MPA$ hay là A, J, P thẳng hàng(đpcm).

Nhận xét: Cả bài toán là một chuỗi biến đổi góc liên tục từ đầu đến cuối. Điểm khó là nếu ta không tìm ra điểm mấu chốt là ở đoạn chứng minh $MPNJ$ nội tiếp thì rất khó đến với đpcm.

Bài toán 4(Đề thi thử vào chuyên KHTN 2014):Cho tam giác ABC nội tiếp (O). Lấy E và F thuộc cung BC không chứa A sao cho $EF \| BC$(tia AE nằm giữa tia AB và AF). Gọi H là trực tâm tam giác ABC. FH cắt (O) tại điểm F. Gọi (L) là đường tròn ngoại tiếp AHG.

i) Chứng minh rằng L nằm trên AE.

ii) Gọi (L) cắt AC, AB tại điểm M, N khác A. Chứng minh rằng AF vuông góc MN tại P.



Lời giải: i) *Trường hợp 1*: Tam giác AHG nhọn. Ta có: $\angle LAG = 90^\circ - \dfrac{\angle GLA}{2} = 90^\circ - \angle GHA$. Gọi AH cắt BC tại điểm K, GF cắt BC tại J. Do đó $\angle LAG = 90^\circ - \angle JHK = \angle GJB = \dfrac{1}{2}(\widehat{GB} + \widehat{FC})$. Do đó: $\angle LAB = \angle LAG - \angle BAG = \dfrac{1}{2}\widehat{FC} = \angle BAE$ do đó hiển nhiên ta có: A, L, E thẳng hàng.

Trường hợp 2: Tam giác AHG có $\angle G \geq 90^\circ$. Chứng minh tương tự(biến đổi với góc phụ 180°).

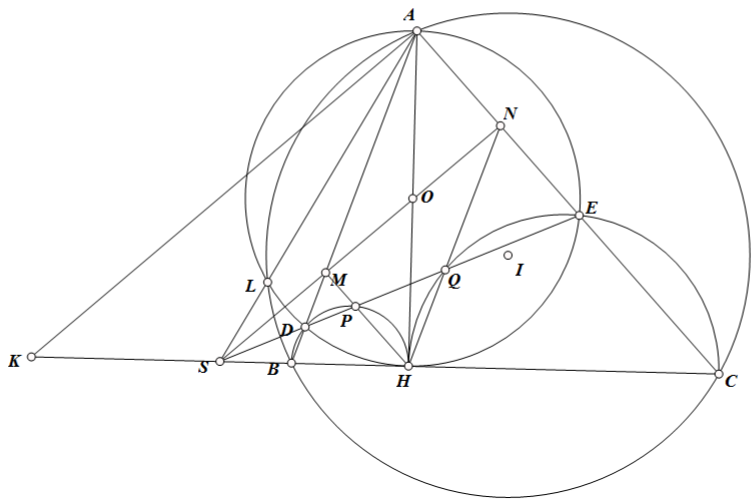
ii) Ta có: $\angle ANM = \dfrac{1}{2}\angle ALM = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 2\angle LAM) = 90^\circ - \angle LAM = 90^\circ - \angle BAF$(do ta đã chứng minh được A, L, E thẳng hàng do đó $\angle BAL = \angle CAF$ hay là $\angle LAM = \angle BAF$) vậy ta có: $\angle ANM + \angle BAF = 90^\circ$ do đó $AF \perp MN$(đpcm).

Bài toán 5(Thi vào lớp Toán,Tin chuyên ĐHSP 2016-2017): Cho tam giác ABC nhọn có $AB < AC$. Kẻ đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt AB, AC tương ứng tại điểm D, E. Đường thẳng DE cắt BC tại điểm S.

a) Chứng minh rằng: $BDEC$ nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $SB.SC = SH^2$.

c) Đường thẳng SO cắt AB, AC tại M, N tương ứng, đường thẳng DE cắt HM, HN lần lượt tại các điểm P, Q tương ứng. Chứng minh rằng: BP, CQ, AH đồng quy.



Lời giải: a) Gọi (I) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Ta thấy rằng theo hệ thức lượng cho các tam giác vuông AHB và AHC thế thì: $AD.AB = AE.AC (= AH^2)$. Do đó thu được: B, D, E, C đồng viên.

b) Ta để ý thấy: $\angle SHD = \angle HED$(do SH tiếp xúc (O)) vậy $SH^2 = SE.SD = SB.SC$ vậy ta có: $SH^2 = SB.SC$.

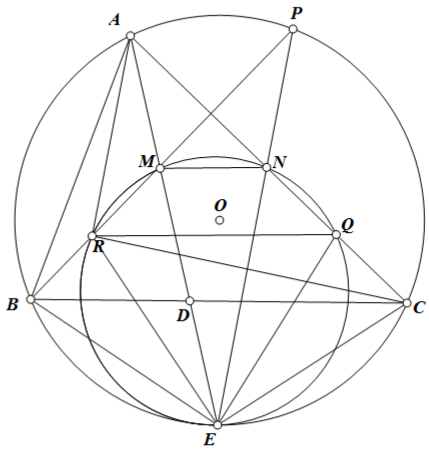
c) Gọi K là điểm đối xứng H qua S. Ta có: $SO \| AK$ do đó $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{BS}{SK} = \dfrac{BS}{SH}$, lại có: $SB.SC = SH^2$ nên $SB.HC = SH(SH - SB) = SH.BH$ do đó $\dfrac{SB}{SH} = \dfrac{BH}{HC}$ do đó $\dfrac{BM}{MA} = \dfrac{HB}{HC}$ do đó $MH \| AC$. Điều đó dẫn tới $BDHP$ nội tiếp hay là $BP \perp MH$ suy ra $BP \perp AC$. Hoàn toàn tương tự $CQ \perp AB$. Vậy ta có: BP, CQ, AH lần lượt là các đường cao của tam giác ABC nên chúng đồng quy tại 1 điểm(đpcm)

Bài toán 6(trích đề vòng 1 KHTN 2016-2017): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có AD là phân giác trong của tam giác. AD cắt lại (O) tại điểm thứ hai là E.

Gọi M là trung điểm của AD. BM cắt lại (O) tại điểm thứ hai là điểm P khác B. EP cắt AC tại điểm thứ hai là N.

a) Chứng minh rằng N là trung điểm của AC.

b) Gọi (EMN) cắt BM tại R khác M. Chứng minh rằng: $RA \perp RC$.

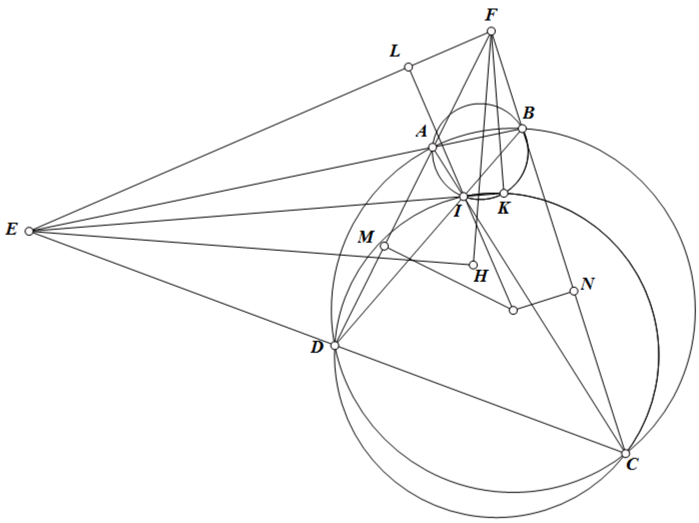


Lời giải: a) Ta thấy rằng: $\angle MAN = \angle BPE = \angle MPN (= \dfrac{\angle BAC}{2})$ do đó ta có được rằng $MAPN$ nội tiếp. Do đó ta có: $\angle APM = \angle ANM = \angle ACB$ hay là $MN \| BC$. Do đó hiển nhiên N là trung điểm AC.

b) Ta gọi (EMN) cắt AC tại điểm thứ hai Q khác N. Ta có $AN.AQ = AM.AE$ hay là $\dfrac{1}{2}AD.AE = \dfrac{1}{2}AQ.AC$ hay là $AD.AE = AQ.AC$. Ta lại có $AD.AE = AB.AC$ (do $\triangle ADB \sim \triangle ACE$) nên ta có ngay được rằng $AQ = AB$ hay là B đối xứng Q qua AD hẳn nhiên điều đó có nghĩa là $EB = EQ$. Ta lại có được rằng:$\angle MRQ = \angle ANM = \angle ACB$ do đó ta có được rằng: $BRQC$ là 1 tứ giác nội tiếp hay là đồng nghĩa với việc $ER = EB = EC$ (do E là trung điểm cung BC không chứa A của (O)). Ta lại có: $\angle REN = \angle RQN = \angle PMN = \angle PAC = \angle NEC$ hay là R và C đối xứng nhau qua NE hay là $NR = NC = NA$ chú ý rằng N là trung điểm AC nên ta có được rằng $RA \perp RC$ (đpcm).

Nhận xét: Thử cho M di động trên đoạn AD, các bạn thử kiểm tra kết luận bài toán xem sao?

Bài toán 7(chọn đội tuyển Hà Nội thi VMO 2012-2013): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp không phải là một hình thang. Gọi AB cắt CD tại E. AD cắt BC tại điểm F. Phần giác các góc CFD và BEC gặp nhau ở điểm H. Hai đường chéo của tứ giác $ABCD$ cắt nhau tại điểm I. Gọi (ABI) cắt (CDI) tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng: E, F, H, K đồng viên.



Lời giải: Trước tiên ta có: $\angle FHE = 180° - \angle HFD - \angle HEB - \angle EAD = 180° - \dfrac{180° - \angle D - \angle C}{2} - \dfrac{180° - \angle B - \angle C}{2} = \dfrac{\angle B + \angle D}{2} = 90°(1)$.

Ta gọi L là giao điểm thứ hai khác A của (EAB) và (ECD). Thế thì ta có: $EL.EF = EA.EB = EI.EK$ do đó tứ giác $LFKI$ nội tiếp. Áp dụng tính chất của trục đẳng phương cho các đường tròn $(FAB), (FCD), (O), (LFKI)$ thì ta có: LF, AB, CD, IK đồng quy tại 1 điểm chính là điểm E.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Ta có: $\angle LAD = 180° - \angle LAF = 180° - \angle LBF = \angle LBC$. Vậy ta có: $\triangle LAM \sim \triangle LBN(c.g.c)$ do đó $\angle LMF = \angle LNF$ hay là L thuộc (FMN). Vậy ta thu được: $\angle OLF = 90°$. Vậy mà theo định lí *Borcard* thì $OI \perp EF$. Vậy O, I, L thẳng hàng. Hay là ta có: $\angle EKF = 90°(2)$. Từ (1)(2) ta thu được E, F, H, K đồng viên(đpcm).

Như tôi đã khẳng định qua cả bài viết thì kĩ năng biến đổi góc rất đặc biệt và rất cần thiết khi học hình học phẳng, và cách để tìm ra con đường biến đổi tốt nhất nằm ở kinh nghiệm mỗi người. Để giúp các bạn luyện tập kĩ năng biến đổi góc thành thục hơn tôi xin đề nghị ba bài tập sau:

Bài toán 8(Mở rộng vòng 1 đề chuyên KHTN):Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Có phân giác $\angle BAC$ cắt BC và (O) lần lượt tại D và E khác A. Lấy M là 1 điểm bất kì trên đoạn AD. BM cắt lại (O) tại điểm thứ hai P. PE cắt AC tại N. (EMN) cắt BM tại điểm thứ hai R. Lấy K đối xứng C qua N. Giả sử R thuộc đoạn BM. Chứng minh rằng $KR \perp RC$.

Bài toán 9: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O)(AD < BC)$. Gọi I là giao điểm hai đường chéo. Kẻ các đường kính CM và DN của tứ giác. Gọi K là giao điểm của AN và BM. Chứng minh rằng: I, K, O thẳng hàng.

Bài toán 10(VMO 2014): Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) có $AB < AC$. Gọi I là trung điểm cung BC không chứa A của (O). Trên AC lấy điểm K khác C sao cho $IK = IC$. BK cắt lại (O) tại D khác B và cắt AI tại E. Đường thẳng DI cắt AC tại F.

a) Chứng minh rằng: $EF = \dfrac{BC}{2}$.

b) Trên DI lấy điểm M sao cho $CM \| AD$. KM cắt BC tại điểm N. Gọi (BKN) cắt (O) tại P khác điểm B. Chứng minh rằng: PK chia đôi AD.