

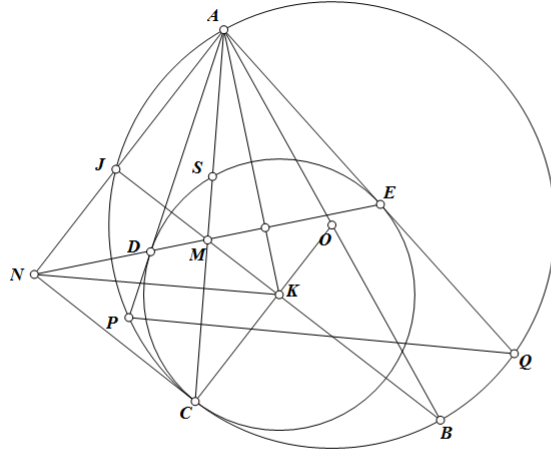
Tuyển tập các lời giải hay cho các bài toán hình học phẳng khó(Số 2)(Tháng 10/2016)

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Đôi điều về chuyên mục: Trong tuyển tập lớn này, tôi sẽ mỗi tháng đưa ra năm lời giải cho năm bài toán khác nhau mà tôi cho là hay. Sau một tháng nhận email phản hồi của các bạn(các lời giải khác mà các bạn nghĩ là hay hơn,mở rộng các bài toán,...), tôi sẽ biên tập lại chúng để viết chúng trong phần **phản hồi bạn đọc** ở số tiếp theo. Mọi liên lạc xin gửi về địa chỉ email: **nguyenduykhuong696@gmail.com**

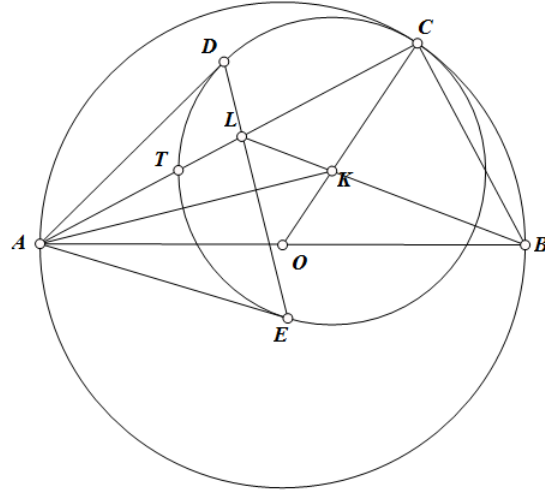
Kết thúc tuần tháng thứ nhất tôi đã trình bày về 5 bài toán hay với các lời giải tôi cho là đẹp và nhận được một số phản hồi từ bạn đọc(đặc biệt là các anh lớp **12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam** với các lời giải khác nhau cho bài toán số 6). Bây giờ ở phần đầu tháng thứ hai tôi sẽ tiếp tục trình bày về 5 bài toán đã đề nghị trong số trước. Trong số mới tôi muốn trình bày về 1 số bài toán liên quan tới phương tích,các biến đổi liên quan tới định lý Pythagoras và đặc biệt là định lý bốn điểm.

Bài toán 6(Hà Nội TST 2015-2016): Cho đường tròn đường kính AB . Lấy điểm C trên nửa đường tròn này sao cho $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Lấy K là 1 điểm thay đổi trên đoạn OC . Vẽ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn ($K; KC$). Chứng minh rằng DE, AC, BK đồng quy tại 1 điểm.



Lời giải 1(Nguyễn Duy Khương): Gọi BK cắt lại (O) tại điểm thứ hai J . Gọi JA cắt DE tại điểm N . Do $\angle KJA = \angle KDA = 90^\circ$ do đó tứ giác $JADE$ nội tiếp. Do (O) tiếp xúc (K) nên áp dụng tính chất trục đẳng phương thì tiếp tuyến chung tại C của $(O), (K), DE$ và JA đồng quy tại 1 điểm N . Gọi DE cắt BK tại điểm M . Kẻ tiếp tuyến thứ hai NS tới (K) thế thì do NC đã là tiếp tuyến tới (K) nên ta có: $DSCE$ là 1 tứ giác điều hoà do đó hiển nhiên là ta có: A, S, C thẳng hàng. Gọi M là giao điểm của BK và DE . Gọi I là trung điểm DE .

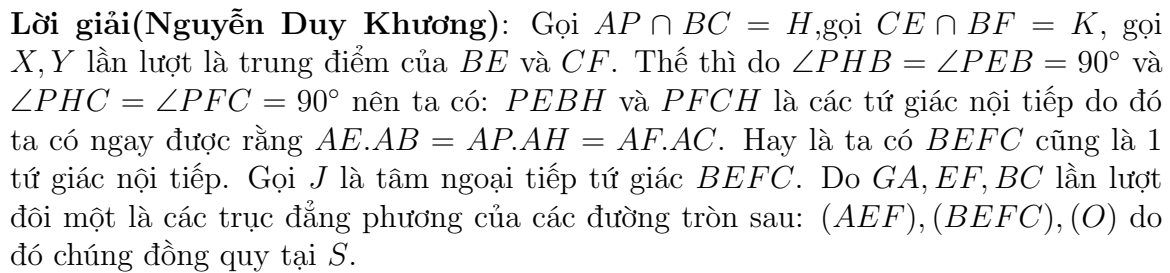
Do M là trực tâm tam giác ANK nên: $MN.MI = MJ.MK = MD.ME$ (do A, J, K, D, E đồng viên). Vậy ta thu được: $(NM, DE) = -1$ (theo hệ thức *Maclaurin*) suy ra: $C(NM, DE) = -1$ mà ở trên ta đã chỉ ra được: $C(NS, DE) = -1$. Do đó: S, C, M thẳng hàng. Vậy AC, BK, DE đồng quy tại điểm M (đpcm).



Lời giải 2(Mai Đặng Quân Anh-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam):

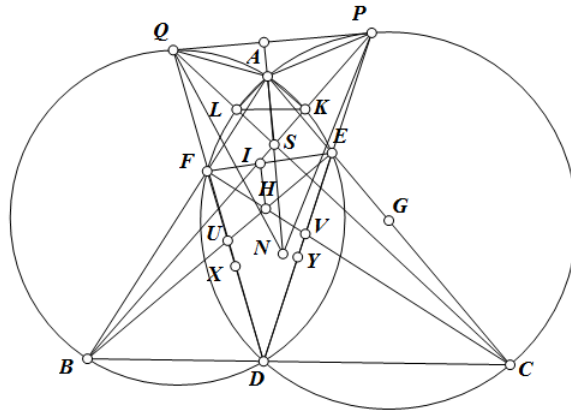
Gọi AC cắt đường tròn (K) tại điểm T , giao BK tại điểm L . Do C là tâm vị tự trong của (O) và (K) nên ta có: $\frac{AT}{TC} = \frac{OK}{KC}$. do đó ta có: $TK \parallel AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác LAB với cát tuyến $\overline{OKC}$ ta có:

$\frac{CL}{CA} \cdot \frac{OA}{OB} \cdot \frac{KB}{KL} = 1$. Do $TK \parallel AB$ nên ta có: $\frac{CL}{CA} = \frac{TL}{TA}$ do đó: $(AL, TC) = -1$. Mặt khác nếu gọi DE cắt AC tại điểm L' thế thì $(AL' TC) = -1$ do đó $L \equiv L'$ do đó ta có: DE, BK, AC đồng quy (đpcm).



Nhận xét: Việc sử dụng định lý *Borcard* hợp lý là chìa khoá tới lời giải cuối cùng. Qua bài toán ta cũng thấy được tầm quan trọng của tư duy điểm trùng trong hình học.

Bài toán 8(Trích HNEU TST 2014-2015): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF . Các đường tròn đường kính AB và AC cắt các tia DF và DE tại các điểm Q và P . Gọi N là tâm ngoại tiếp tam giác DEF . Chứng minh rằng: $AN \perp PQ$.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương):

Ta có: $\angle QAF = \angle FDB = \angle A$ và $\angle QFA = \angle DFB = \angle C = \angle EFA$ do đó hiển nhiên ta có $\triangle QAF = \triangle EAF(c.g.c)$ do đó $QA = AE$ và $QF = EF$ hoàn toàn tương tự thì $AP = AF$ và $EF = EP$. Do đó ta có: $AP^2 - AQ^2 = AF^2 - AE^2$. Gọi X, Y lần lượt là trung điểm DF và DE , ta có: $NP^2 = YP^2 + NY^2$ và $NQ^2 = NX^2 + QX^2$ hay là $NP^2 - NQ^2 = (YP^2 + NY^2) - (NX^2 + QX^2) = \overline{EF}(\overline{DE} - \overline{DF}) + \frac{DE^2 - DF^2}{4} + \frac{DF^2 - DE^2}{4} = \overline{EF}.\overline{DE} - \overline{EF}.\overline{DF}$. Công đoạn còn lại là chứng minh: $AF^2 - AE^2 = \overline{EF}.\overline{DE} - \overline{EF}.\overline{DF}$. Nếu gọi H là trực tâm tam giác ABC khi đó H là tâm nội tiếp tam giác DEF (kết quả quen thuộc). Hiển nhiên A là tâm bàng tiếp góc D của tam giác DEF do đó: $AF^2 - AE^2 = EH^2 - FH^2$.

Kẻ HI vuông góc EF tại điểm I trên EF ta có ngay rằng: $EH^2 - FH^2 = IE^2 - IF^2$

$$\begin{aligned}
& \text{chú ý việc } I \text{ là tiếp điểm đường tròn nội tiếp tam giác } DEF \text{ do đó } IE^2 - IF^2 = \\
& = \frac{(ED + EF - FD)^2}{4} - \frac{(EF + FD - ED)^2}{4} \\
& = \frac{(\overline{ED} + \overline{EF} - \overline{FD} - \overline{EF} - \overline{FD} + \overline{ED})(\overline{ED} + \overline{EF} - \overline{FD} + \overline{EF} + \overline{FD} - \overline{ED})}{4} \\
& = \frac{4(\overline{ED} - \overline{FD}) \cdot \overline{EF}}{4} = \overline{EF} \cdot \overline{DE} - \overline{EF} \cdot \overline{DF}.
\end{aligned}$$

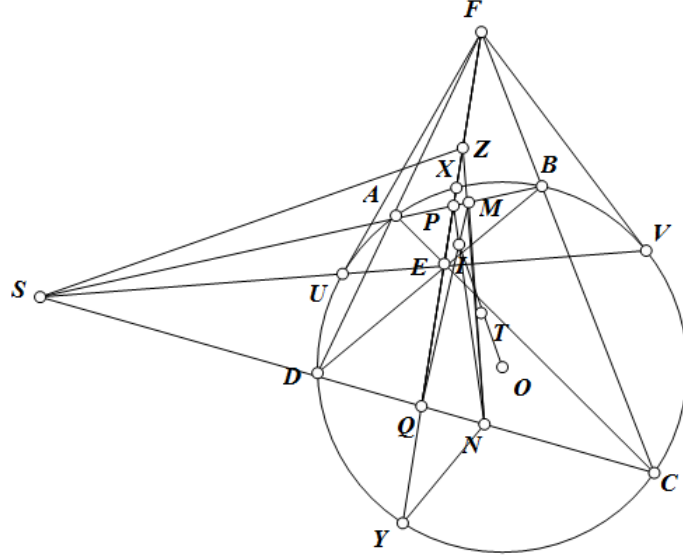
Vậy từ đây ta có $AP^2 - AQ^2 = NP^2 - NQ^2$ nên áp dụng định lí bốn điểm thẳng thì $NA \perp PQ$ (đpcm).

Nhận xét: Lời giải trên khá khủng nếu xét về mặt biến đổi nói chung xong lại rất đẹp nếu xem xét kĩ ở chỗ là đã tận dụng tối đa giả thiết để từ đó có các biến đổi hợp lí với cách thực hiện bỏ đề 4 điểm. Mọi biến đổi đều được thực hiện hết sức tự nhiên từ đầu đến cuối nhờ tư tưởng định lí bốn điểm xuyên suốt.

Trước khi đến với hai bài toán còn lại tôi muốn nói một chút về quan niệm **lời giải hay** của mình. Theo tôi thì một lời giải hay nói chung phải có tư tưởng rõ ràng của người làm để thực hiện. Chúng ta cần lưu ý rằng tư tưởng đứng đắn thì sẽ có được lời giải cuối cùng và dù ý tưởng đó có dẫn tới một lời giải dài đi chăng nữa nó cũng đã thể hiện được trình độ của người làm. Nếu chúng ta đối với các bài toán như trò chơi trí thức thì ta lại càng nhận ra tầm quan trọng của việc có tư tưởng giải- vì khi đó nếu ta giải ra được bài toán thì đó cũng là lối tư duy của chính chúng ta. Con đường đó hoàn toàn có thể giống người khác xong mỗi người lại có cách tư duy để tìm ra vấn đề theo cách riêng của mình. Và dĩ nhiên nếu đề cao tính tư duy thì điều đó sẽ kích thích trí óc ta phát triển. Như vậy tựu chung lại điều cần có trong lời giải hay nên là "**một tầm nhìn rộng hơn cái kết luận của bài toán**".

Bài toán 9(Đề thi chọn HSG khối 10, chuyên ĐHSPT, 2015-2016): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Giả sử AD cắt BC tại E và 2 đường chéo cắt nhau tại điểm F . EF cắt AB và CD lần lượt tại các điểm P và Q .

- Chứng minh rằng M, N, P, Q nội tiếp đường tròn tâm T .
- Chứng minh rằng OT, NP, MQ đồng quy.



Lời giải gốc: a) Gọi AB cắt CD tại điểm S . Khi đó theo hàng điểm điều hoà cơ bản ta có: $(SQ, DC) = -1$ và do đó theo phép chiếu xuyên tâm F thì ta có: $(SP, AB) = -1$ do đó theo hệ thức Maclaurin thì $\overline{SA} \cdot \overline{SB} = \overline{SP} \cdot \overline{SM} = \overline{SC} \cdot \overline{SD} = \overline{SQ} \cdot \overline{SN}$ do đó $MNQP$ là tứ giác nội tiếp.

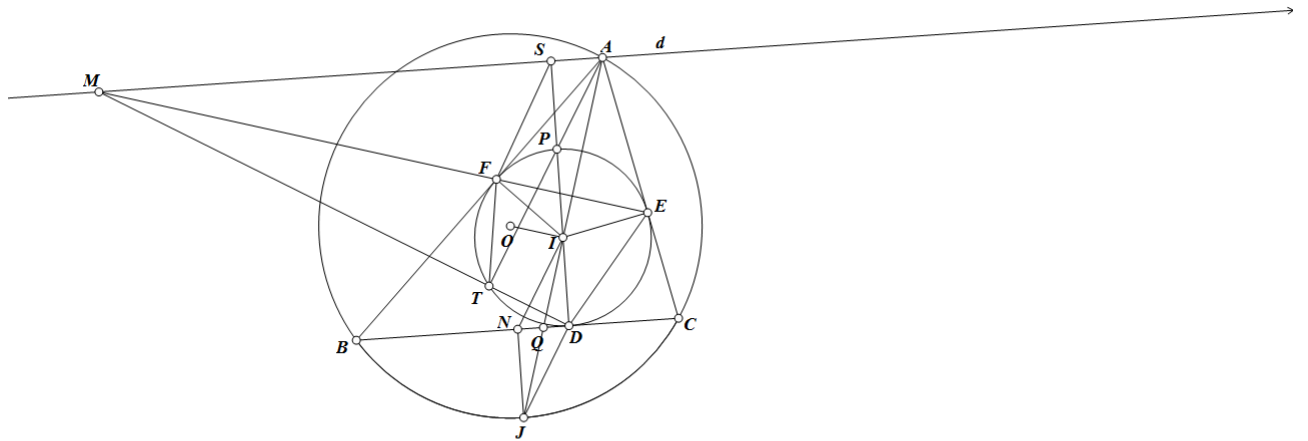
b) Gọi MQ cắt NP tại điểm I . Gọi Z là trung điểm EF theo định lý về đường thẳng Gauss thì M, N, Z thẳng hàng. Do đó áp dụng định lý Borcard cho tứ giác $MNQP$ nội tiếp ta có: $TI \perp SZ$.

Gọi EF cắt (O) tại 2 điểm X và Y thì cũng theo hàng điểm điều hoà cơ bản ta có: $(FE, XY) = -1$ do đó áp dụng hệ thức Newton ta có: $ZE^2 = ZF^2 = \overline{ZX} \cdot \overline{ZY}$ chú ý $MNQP$ nội tiếp nên $\overline{ZM} \cdot \overline{ZN} = \overline{ZP} \cdot \overline{ZQ}$ do đó: $P_{Z|(O)} = P_{Z|(MNQP)}$ hay P thuộc trục đẳng phương của $(MNQP)$ và (O) . Lại có: $\overline{SP} \cdot \overline{SM} = \overline{SA} \cdot \overline{SB}$ (Cmt) do đó $P_{S|(O)} = P_{S|(MNQP)}$. Vậy ta thu được SZ là trục đẳng phương của $(MNQP)$ và (O) do đó $TO \perp SZ$ do đó T, I, O thẳng hàng.

Nhận xét: Trên đây là lời giải của tôi-xong lần đầu tiên tôi ghi nhận việc lời giải gốc

và mình có chung một ý tưởng. Qua bài toán này ta thấy rằng tư tưởng khởi nguồn để giải toán mới là quan trọng và chắc chắn sẽ tạo ra những lời giải hay. Ngoài ra bài toán này cũng rất đáng chú ý khi đã thực sự huy động rất nhiều kiến thức liên quan tới cấu hình cát tuyến, tứ giác điều hoà,... Sau khi làm xong bài này có thể dự đoán cảm hứng ra đề là từ bài toán **IMO Shortlist 2009** được đề nghị bởi *Germany*.

Bài toán 10(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC sao cho $AB + AC = 2BC$. Tam giác nội tiếp trong đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I) . (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F . AI cắt lại đường tròn (O) tại J khác A . Một đường thẳng d qua A song song với BC cắt EF tại M . Chứng minh rằng: $\angle JDM = 90^\circ$.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi AI cắt BC tại Q . DI cắt lại (I) tại P khác D và cắt d tại S . AP cắt lại (I) tại T . Gọi N là trung điểm BC . Khi đó ta dễ có AP đi qua tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC hay là $AP \parallel IN$. Do DP là đường kính của (I) do đó ta có ngay $\angle DTP = \angle PSA = 90^\circ$ hay tứ giác $DTSA$ nội tiếp. Lại có $d \parallel BC$ nên ta cũng dễ thu ngay được rằng: $\angle ISA = \angle IFA = 90^\circ = \angle IEA$ do đó 5 điểm A, S, F, E, I đồng viên do đó ta cũng có ngay được tứ giác $ASFE$ nội tiếp. Dễ thấy tứ giác $EFTD$ nội tiếp (I) . Do đó ta có ngay được rằng SA, EF, TD đồng quy tại M . Chú ý rằng $IN \parallel AP$ do đó ta cũng có ngay được rằng $DM \perp IN$.

Ta có một kết quả cơ bản là: J là tâm ngoại tiếp tam giác IBC hay là $JI = JB = JC$.

Áp dụng định lí *Ptolemy* cho tứ giác $JBAC$ nội tiếp thì ta có ngay được rằng: $JA \cdot BC = IJ \cdot (AB + AC)$ hay là $JA = 2IJ$ hay ta có ngay rằng I là trung điểm JA .

Do $\angle QCJ = \frac{\widehat{JC}}{2} = \angle JAC$ nên ta cũng có được rằng: $\triangle JQC \sim \triangle JCA (g.g)$ suy ra được rằng $JC^2 = JQ \cdot JA$ suy ra là $IJ^2 = JQ \cdot JA \Rightarrow JQ = \frac{IJ^2}{JA} \Rightarrow JQ = \frac{IJ}{2}$ vậy hay là ta có Q là trung điểm IJ do đó ta có $INJD$ là 1 hình bình hành suy ra $IN \parallel JD$ hay là $\angle JDM = 90^\circ$.

Nhận xét: Bài toán trên được tôi tình cờ tìm ra khi thực hiện chứng minh một bài toán khác về dạng tam giác đặc biệt: $AB + AC = 2BC$. Nhờ giả thiết này mà đã giấu đi khá nhiều điểm quan trọng đó là điều khiến bài toán tăng độ khó. Việc phối hợp tốt phương tích trong bài làm sẽ tạo ra những lời giải hết sức ấn tượng. Các bạn có thể tham khảo bài toán tương tự trên tạp chí *Toán học Tuổi trẻ* tháng 10 năm 2012.

Như vậy là chúng ta đã trải qua hành trình của tháng thứ hai, qua các bài toán trên tôi muốn các bạn hiểu rằng khi làm toán người học cần phải biết vạch trước ý định của mình (muốn có biến đổi này cần có gì và dẫn tới gì...) khi thực hiện các tư tưởng (hướng) giải. Chân thành cảm ơn anh **Ngô Thế Anh Khoa-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam** đã tập hợp các lời giải của **bài toán số 6** của lớp và gửi cho tôi.

Khép lại số 2 này xin nêu một câu nói mà tôi rất yêu thích của một nhà nho Nhật Bản:

"Tư tưởng cũng như măng tre thường bị chôn vùi dưới lòng đất"

Các bài toán đề nghị tháng sau

Bài toán 11 (Nguyễn Văn Linh-T12/468-THTT): Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ có đường tròn nội tiếp (I) . Tia AB cắt tia CD tại điểm E và tia DA cắt tia CB tại điểm F . Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm nội tiếp tam giác EFB và tam giác EFD . Chứng minh rằng: $\angle I_1IB = \angle I_2ID$

Bài toán 12 (chọn đội tuyển Hà Nội 2017): Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Gọi M là trung điểm BC . AM cắt (O) tại các điểm A, D . Giả sử $BD \cap AC = F, CD \cap AB = E$. $(ABF) \cap (ACE) = A, P$. Gọi (S_1) là đường tròn qua C tiếp xúc AB tại A . Gọi (S_2) là đường tròn tiếp xúc AC tại A và đi B . $A, Q = (S_1) \cap (S_2)$. Chứng minh rằng tam giác OPQ vuông.

Bài toán 13 (Mathley-Trần Quang Hùng): Cho tam giác ABC có đường tròn

(K) tiếp xúc AC, AB lần lượt tại các điểm E và F . (K) cắt BC tại các điểm M, N sao cho N nằm giữa M và B . (IFN) cắt (IEM) tại J . Chứng minh rằng: $IJ \perp KJ$.

Bài toán 14(USA TST): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Lấy K trên (O) sao cho $AK \parallel BC$. Gọi (I) là đường tròn nội tiếp tam giác ABC . (I) tiếp xúc BC tại D . Gọi DK cắt lại (O) tại điểm T . AI cắt BC , (O) lần lượt tại E, A, F . Gọi (DEF) cắt đường tròn bàng tiếp góc A tại điểm Q_1, Q_2 . Chứng minh rằng AT đi qua một trong hai điểm Q_1, Q_2 .

Bài toán 15(Nguyễn Minh Hà): Cho tam giác ABC không cân ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc AB và AC tại điểm F và E . Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Gọi M là trung điểm đoạn BC . Chứng minh rằng nếu H, I, M thẳng hàng thì H nằm trên EF .

Phản hồi bạn đọc

Các bài toán từ một đến năm thì có khá ít phản hồi song trong quá trình dò tìm tôi đã tìm thấy mở rộng cho bài toán **Trường hè Titan 2016** của bạn **Nguyễn Đình Hoàng-THPT chuyên Phan Bội Châu** các bạn có thể tham khảo tại [1]. Để tiện theo dõi tôi đã đăng thêm chuyên đề thứ tư trong blog về các lời giải **bài toán số 6**, tại đây [2]

Do mới xuất bản được 1 số mà phần này còn chưa được sôi nổi lắm, hi vọng trong thời gian sắp tới tôi sẽ nhận được nhiều phản hồi từ bạn đọc hơn.

Trích dẫn:

[1] diendantoanhoc.net

[2] khuongworldofgeo.blogspot.com