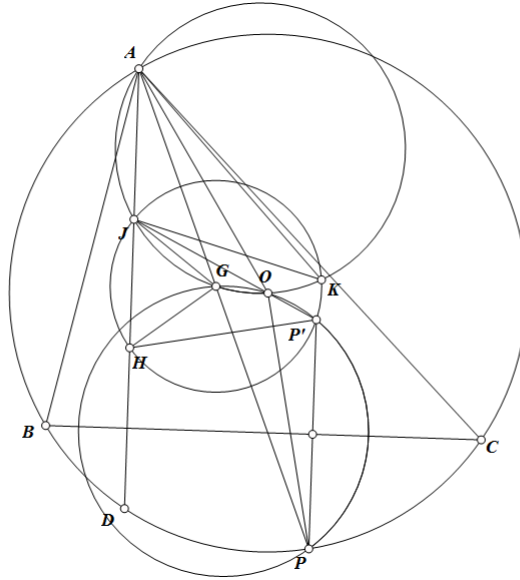


Tuyển tập các lời giải hay cho các bài toán hình học phẳng khó(Số 1)(Tháng 9/2016)

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Đôi điều về chuyên mục: Trong tuyển tập lớn này, tôi sẽ mỗi tháng đưa ra năm lời giải cho năm bài toán khác nhau mà tôi cho là hay. Sau một tháng nhận email phản hồi của các bạn(các lời giải khác mà các bạn nghĩ là hay hơn,mở rộng các bài toán,...), tôi sẽ biên tập lại chúng để viết chúng trong phần **phản hồi bạn đọc** ở số tiếp theo. Cuối mỗi tháng sẽ có list bài của tháng sau để các bạn tiện theo dõi. Mọi liên lạc xin gửi về địa chỉ email: **nguyenduykhuong696@gmail.com**

Bài toán 1(Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H . P là một điểm thuộc cung BC không chứa A của (O) ($P \neq B, C$). P' đối xứng P qua BC . (OPP') cắt AP tại G . Chứng minh rằng trực tâm tam giác AGO nằm trên HP' .



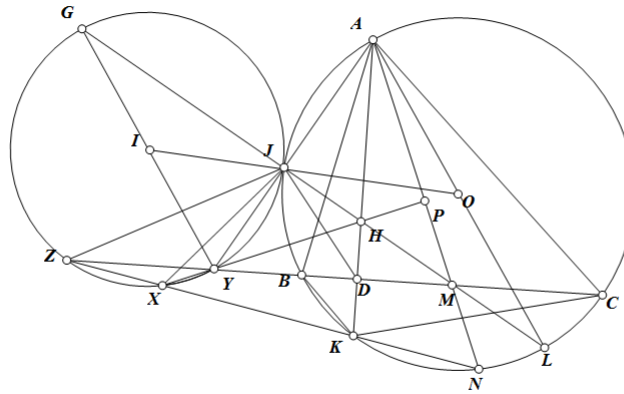
Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi AH cắt (AGO) tại điểm J khác A . Thế thì: $\angle JOG = \angle HAG = \angle GPP'$ (do $AH \parallel PP'$) $= 180^\circ - \angle GOP'$ do đó O, P', J thẳng hàng. Lại có: $\angle GJO = \angle PAO = \angle GPO = \angle GP'O$ do đó tam giác GJP' cân tại G . Lại có: $\angle JGP' = \angle AOP = 2\angle ACP$. Lại có: $\angle AHP' = \angle HPP' = \angle ACP$ (do

nếu gọi AH cắt lại (O) tại D thì $HDPP'$ là hình thang cân nên dĩ nhiên $\angle HPP' = \angle ACP$ do đó G là tâm (JHP') . Ta gọi K là giao (JHP') cắt (AGO) tại điểm K khác J .

Lại có: $\angle GKO = \angle OAG = \angle GPO = \angle GP'O$ do đó $\angle OP'K = \angle OKP'$ nên $OK = OP'$ vậy khi đó dĩ nhiên K đối xứng P' qua GO từ đó $GK = GH = GP'$ mà $\angle GHJ = \angle GJH = 180^\circ - \angle AJG = \angle AOG = \angle AKG$ vậy thì K cũng đối xứng H qua AG . Vậy theo định lí về đường thẳng Steiner thì trục tâm tam giác AGO nằm trên HP' (đpcm).

Nhận xét: Ở lời giải trên tác giả đã có một lời giải khác với lời giải gốc của người ra đề. Điểm thú vị của lời giải trên chính là việc không cần nhất thiết chỉ ra trục tâm của tam giác đó.

Bài toán 2 (Kiểm tra trường hè Titan tháng 8/2016): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có: H là trực tâm và AM là trung tuyến tam giác ABC . AM cắt lại (O) tại điểm N . Ba đường thẳng: qua H vuông góc AN, BC, KN cắt nhau tạo thành tam giác XYZ . Chứng minh rằng: (XYZ) tiếp xúc (O) .



Lời giải (Nguyễn Duy Khương):

Gọi tia MH cắt (O) tại điểm J , gọi AD là đường cao của tam giác ABC . Hiển nhiên ta có: AJ, HP, MD là các đường cao của tam giác AHM suy ra AJ, HP, BC đồng quy tại điểm Y . Hay là A, J, Y thẳng hàng.

Ta đi chứng minh rằng J thuộc (XYZ) . Ta có: $HDYJ$ nội tiếp do đó $XYJZ$ nội tiếp khi và chỉ khi:

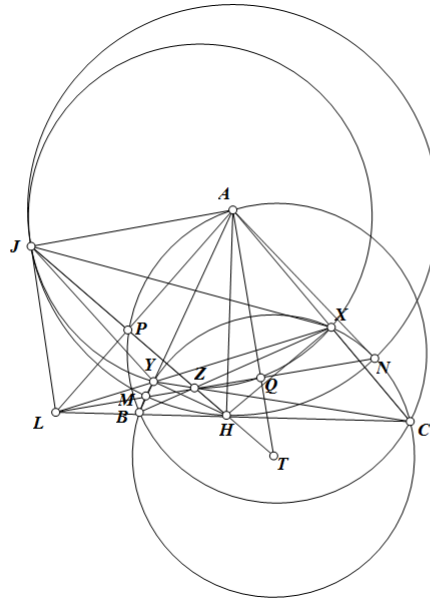
$(JX, KX) \equiv (AH, JH)(\text{mod}\pi)$ hay là tứ giác $JHKKX$ nội tiếp.

Lại có: $(JK, XK) \equiv (JA, NA) \equiv (JD, YD) \equiv (JH, YH)(\text{mod}\pi)$ vậy ta có: $JHKKX$ nội tiếp hay là J thuộc (XYZ) . Vậy tức là J thuộc (XYZ) và (O) . Vì J thuộc (O) và (XYZ) mà A, J, Y thẳng hàng nên khi gọi YG, AL là các đường kính (XYZ) và (O) thì $\overline{GJL} \perp YA$, ta có: $\angle JGY = \angle JXY = \angle JKA = \angle JLA$ do đó $GY \parallel AL$ vậy hiển nhiên $\triangle GJY \sim \triangle AJL$ do I, O lần lượt là trung điểm GY và AL nên $\angle IJY = \angle OJA$ hay là thu được I, J, O thẳng hàng hay (XYZ) tiếp xúc (O) (đpcm).

Nhận xét: Bài toán này hay nhưng không quá khó rất phù hợp để lấy làm bài thi trong 1 đề kiểm tra định kì. Ở bài toán trên ta thấy được tiếp điểm J sinh ra cực kì hay và hợp lí. Cách giải trên tuy dài hơn lời giải gốc xong lại thể hiện tư duy chứng minh tiếp xúc rất hay đó là sử dụng vị tự.

Độc giả có thể tham khảo lời giải gốc và của bài toán mở rộng ở đây [1].

Bài toán 3(Trịnh Huy Vũ): Cho tam giác ABC có đường cao AH . Gọi X, Y lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ H xuống AC, AB . Z là giao điểm của BX và CY . Chứng minh rằng (XYZ) tiếp xúc $(A; AH)$.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Quay trở lại bài toán: Gọi XY cắt BC tại điểm L . Gọi LA cắt (ABC) tại điểm P . Lấy J đối xứng H qua LA . Ta có: tứ giác $AYHX$ nội tiếp nên $\angle YXH = \angle HAB = \angle YHL$ do đó ta có: $LH^2 = \overline{LX} \cdot \overline{LY} = \overline{LB} \cdot \overline{LC} = \overline{LP} \cdot \overline{LA}$ do đó P thuộc (AH) . Do J đối xứng H qua LA nên theo phép vị tự tỉ số 2

tâm H thì J thuộc $(A; AH)$. Lại có: J đối xứng H qua AL nên $\angle LJA = 90^\circ$ suy ra LJ là tiếp tuyến đến $(A; AH)$.

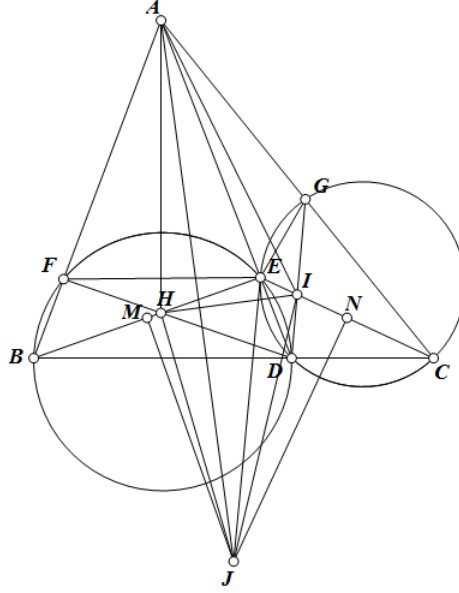
Gọi T là tâm $(BCXY)$ theo định lí Bocard thì Z là trục tâm tam giác ALT . Gọi TZ cắt AL tại điểm P' . Gọi AT cắt LZ tại Q thì $\overline{LP'} \cdot \overline{LA} = \overline{LZ} \cdot \overline{LQ} = \overline{LM} \cdot \overline{LN}$ (hệ thức Maclaurin) $= \overline{LX} \cdot \overline{LY} = \overline{LB} \cdot \overline{LC}$ suy ra P' thuộc (O) do đó P trùng P' . Vậy T, Z, P, H thẳng hàng. Do đó P, J, Z, H thẳng hàng. Ta chỉ cần chứng minh J thuộc (XYZ) khi đó hiển nhiên LJ là tiếp tuyến tới (XYZ) . Tứ giác $LXZY$ nội tiếp khi và chỉ khi $\angle ZJY = \angle ZXY = \angle ZCH$ hay tứ giác $JCHY$ nội tiếp hay Z có cùng phương tích tới 2 đường tròn $(BCXY)$ và $(A; AH)$. Gọi $(A; AH)$ cắt $(BCXY)$ tại các điểm M, N .

Ta có: $AH^2 = AM^2 = AN^2 = \overline{AX} \cdot \overline{AC} = \overline{AY} \cdot \overline{AB}$ do đó AM, AN lần lượt là tiếp tuyến đến $(BCXY)$. Do đó quen thuộc là ta thấy rằng: BX, CY, MN đồng quy tại 1 điểm chính là Z (Gọi MN cắt YB, CX tại các điểm E, F sử dụng hàng điều hoà cơ bản ta có:

$(AEYB) = (AFXC) = -1$ do đó BX, CY, MN đồng quy). Vậy hiển nhiên: phương tích từ Z tới $(BCXY)$ = phương tích từ Z tới $(A; AH)$ do đó tứ giác $JCHY$ nội tiếp và do đó $JXYZ$ nội tiếp vậy mà dễ thấy LJ là tiếp tuyến tới (XYZ) do đó (XYZ) tiếp xúc $(A; AH)$ tại J (đpcm).

Nhận xét: Bài toán này tiếp tục là một lời giải mới được tác giả đề xuất khác với chứng minh gốc. Điểm thú vị trong chứng minh mới là việc chứng minh sử dụng nhuần nhuyễn các công cụ tỉ số kép và phương tích để thu được kết luận quan trọng là J thuộc (XYZ) . Lời giải gốc của tác giả **Nguyễn Văn Linh** sử dụng phép nghịch đảo.

Bài toán 4 (Thành Phố Hồ Chí Minh TST 2011): Cho tam giác ABC nhọn. Lấy D là 1 điểm bất kì trên đoạn BC không trùng B, C . Lấy E là 1 điểm trên đoạn AD (E không trùng A, D). Gọi (DEB) cắt AB tại F khác B và gọi (DEC) cắt AC tại G khác C . EC cắt GD tại I và FD cắt BE tại H . Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC . Chứng minh rằng: AJ vuông góc HI .



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi M, N lần lượt là trung điểm EB và EC . Do J là tâm ngoại tiếp tam giác EBC do đó ta có JM vuông góc BE và JN vuông góc EC . Áp dụng định lý *Pythagoras* thế thì ta có: $JH^2 = MH^2 + JM^2$ và $JI^2 = IN^2 + JN^2$. Do đó ta có được rằng: $JH^2 - JI^2 = MH^2 + JM^2 - IN^2 - JN^2$ (1). Tiếp tục áp dụng định lý *Pythagoras* ta có: $JM^2 = JE^2 - ME^2$ và $JN^2 = JE^2 - EN^2$ do đó ta thu được rằng $JM^2 - JN^2 = NE^2 - ME^2$.

Từ đó thay lại vào (1) ta có: $JH^2 - JI^2 = MH^2 - IN^2 + NE^2 - ME^2 = (NE^2 - IN^2) - (ME^2 - MH^2) = \overline{IE} \cdot \overline{IC} - \overline{HE} \cdot \overline{HB} = P_{I|(O_1)} - P_{H|(O_1)}$.

Trước khi quay lại tiếp tục giải bài toán, tôi xin nêu hai bổ đề nhỏ:

1) Cho tứ giác $ABCD$ có AC vuông góc BD khi và chỉ khi $AB^2 + DC^2 = BC^2 + AD^2$ (Bổ đề 4 điểm)

2) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp $(O; R)$. Giả sử AD cắt BC tại K và AC cắt BD tại I . Khi đó ta có: $IK^2 = P_{K|(O)} - P_{I|(O)}$.

Chứng minh bổ đề 2: Ta kẻ các tiếp tuyến KE, KF đến đường tròn (O) (E, F thuộc (O)). Gọi EF cắt AD và BC lần lượt tại X và Y . Theo hàng điểm điều hoà cơ bản thế thì ta có $(KX, AD) = (KY, BC) = -1$ do đó AC, BD, EF đồng quy tại điểm

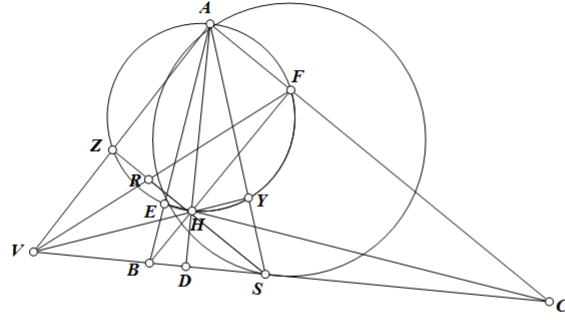
I. Lại có OK vuông góc EF nên ta có IF vuông góc OK . Áp dụng bổ đề 1 thế thì $IK^2 - IO^2 = KF^2 - R^2$ hay là $IK^2 = KF^2 - R^2 + IO^2 = P_{K|(O)} - P_{I|(O)}$ (do $P_{I|(O)} < 0$) và ta thu được đpcm.

Quay trở lại bài toán ban đầu, áp dụng bổ đề 2 thế thì ta dễ dàng có được rằng: $AH^2 = P_{A|(O_1)} - P_{H|(O_1)}$ và $AI^2 = P_{A|(O_2)} - P_{I|(O_2)}$.

Đến đây ta cần chứng minh rằng phương tích từ A đến (O_1) bằng phương tích từ A đến $(O_2)(*)$, thật vậy ta có: $(AF, EF) \equiv (AD, BD)(mod\pi)$ và $(AG, EG) \equiv (AD, CD)(mod\pi)$ nên ta dễ có tứ giác $AFEG$ nội tiếp. Do đó ta lại có: $(EG, FG) = (DA, BA)(mod\pi)$ đồng thời ta có $(EG, CG) \equiv (AD, BD)(mod\pi)$ do đó dẫn tới tứ giác $BFGC$ nội tiếp. Từ đây ta dễ thu được $\overline{AF}.\overline{AB} = \overline{AE}.\overline{AD} = \overline{AG}.\overline{AC}$ hay là ta có được (*). Do đó, $AH^2 - AI^2 = P_{I|(O_2)} - P_{H|(O_1)} = JH^2 - JI^2$. Áp dụng bổ đề 1 ta thu được $AJ \perp HI$ (đpcm)

Nhận xét: Tận dụng bổ đề bốn điểm và phương tích sẽ đem lại cho ta rất nhiều lời giải thú vị giống như lời giải trên. Bài toán trên thì tôi cũng không rõ lời giải gốc giải ra sao xong đây chính là bài toán tổng quát của một bài toán có nhiều ứng dụng sau: "Cho tam giác ABC có trực tâm H . Gọi O' là tâm ngoại tiếp tam giác BHC . Chứng minh rằng: AO' đi qua tâm đường tròn *Euler* của tam giác ABC ".

Bài toán 5(Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC nhọn có BE, CF lần lượt là các đường cao. Dựng một đường tròn qua A, E và tiếp xúc BC tại S . Lấy V đối xứng S qua B . Chứng minh rằng: SE cắt FV trên (AEF) .



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi H là trực tâm tam giác ABC và AH cắt BC tại D thế thì do $BV^2 = BS^2 = \overline{BE} \cdot \overline{BA} = \overline{BD} \cdot \overline{BC}$ (do BC tiếp xúc (AES)) nên $BV^2 = BS^2 = \overline{BE} \cdot \overline{BA}$ do đó $(VS, DC) = -1$ và do đó ta có $\overline{DV} \cdot \overline{DS} = \overline{DB} \cdot \overline{DC}$ (theo hệ thức Maclaurin) do đó H là trực tâm tam giác AVS . Ta gọi SE cắt (AEF) tại R , gọi AS cắt (AEF) tại điểm thứ hai Y . Điều phải chứng minh tương đương R thuộc VF .

Ta có: $\overline{SE} \cdot \overline{SR} = \overline{SY} \cdot \overline{SA} = \overline{SD} \cdot \overline{SV}$ (do tứ giác $AYDV$ nội tiếp) suy ra $REDV$ là một tứ giác nội tiếp. Chú ý rằng tứ giác $HEBD$ nội tiếp nên ta có: $(VR, ER) \equiv -(ED, BD)(\text{mod } \pi)$ lại có $REHF$ nội tiếp do đó $(ER, FR) \equiv -(EH, FH)(\text{mod } \pi)$ từ đó ta có: $(VR, ER) \equiv (FR, ER)(\text{mod } \pi)$ hay là V, R, F thẳng hàng.

Nhận xét: Bài toán lần đầu tiên xuất hiện trên group **Bài toán hay-Lời giải đẹp**[3]. Lời giải trên được tác giả đề nghị không phải là ngắn gọn nhất. Có thể kể đến ý tưởng biến đổi tỉ số phương tích của tác giả **Mẫn Bá Tuấn-học sinh chuyên Toán THPT chuyên ĐHSP Hà Nội**. Ở đây xin nêu cách này bởi sự khai thác triệt để giả thiết tiếp xúc trong đề bài.

Các bài toán đề nghị tháng sau

:

Bài toán 6(Hà Nội TST 2015-2016): Cho đường tròn đường kính AB . Lấy điểm C trên nửa đường tròn này sao cho $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Lấy K là 1 điểm thay đổi trên đoạn OC . Vẽ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn ($K; KC$). Chứng minh rằng DE, AC, BK đồng quy tại 1 điểm.

Bài toán 7(Trần Quang Hùng-T12/466-THTT): Cho tam giác ABC nhọn không cân nội tiếp đường tròn (O). Lấy P là 1 điểm thuộc tam giác ABC sao cho AP vuông góc BC . Kẻ PE, PF lần lượt vuông góc AB, AC (E, F thuộc AB và AC). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại (O) tại G . Chứng minh rằng GP, BE, CF đồng quy tại 1 điểm.

Bài toán 8(Trích HNEU TST 2014-2015): Cho tam giác ABC có các đường cao AD, BE, CF . Các đường tròn đường kính AB và AC cắt các tia DF và DE tại các điểm Q và P . Gọi N là tâm ngoại tiếp tam giác DEF . Chứng minh rằng: $AN \perp PQ$.

Bài toán 9(Đề thi chọn HSG khối 10, chuyên ĐHSPT, 2015-2016): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). M, N lần lượt là trung điểm AB và CD . Giả sử AD cắt BC tại E và 2 đường chéo cắt nhau tại điểm F . EF cắt AB và CD lần lượt tại các điểm P và Q .

a) Chứng minh rằng M, N, P, Q nội tiếp đường tròn tâm T .

b) Chứng minh rằng OT, NP, MQ đồng quy.

Bài toán 10(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC sao cho $AB + AC = 2BC$. Tam giác nội tiếp trong đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F . AI cắt lại đường tròn (O) tại J khác A . Một đường thẳng d qua A song song với BC cắt EF tại M . Chứng minh rằng: $\angle JDM = 90^\circ$.

Trích dẫn:

[1]<https://nguyenvanlinh.wordpress.com/2016/09/16/tangent-circles-and-generalization/>

[2]<https://www.facebook.com/groups/Loicenter/>

[3]<https://www.facebook.com/groups/Loicenter/>