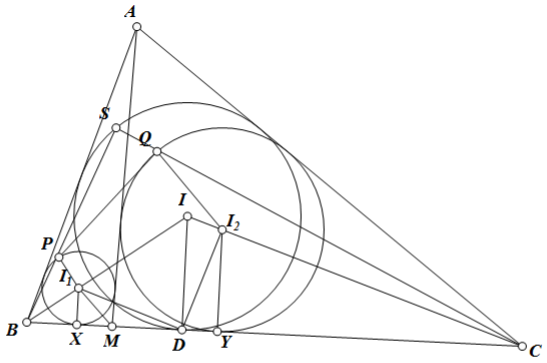
Bàn về một bài toán hay trong đề chọn đội tuyển Sư Phạm năm 2014-2015

Bài toán 1(trích đề HNEU TST 2014-2015): Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC ở D. M thay đổi trên cạnh BC. $(I_1),(I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác (ABM),(ACM). Gọi PQ là tiếp tuyến chung ngoài của $(I_1),(I_2)(P\in(I_1),Q\in(I_2))$. Gọi $BP\cap CQ=S$.

a) Chứng minh rằng: M,I_1,I_2,D đồng viên.

b) Chứng minh rằng khi M chạy trên đoạn BC thì S chạy trên một đường tròn cố định.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): a)Ta thấy rằng: MI_1,MI_2 lần lượt là các phân giác trong và ngoài của góc AMB nên hiển nhiên $\angle I_1MI_2=90^\circ$. Gọi X,Y lần lượt là tiếp điểm của đường tròn nội tiếp $(I_1),(I_2)$ với BC. Chú ý rằng:

$$DY=DC-YC=\frac{AB+BC-AC}{2}-\frac{AM+MC-AC}{2}=\frac{AB+MB-AM}{2}=$$

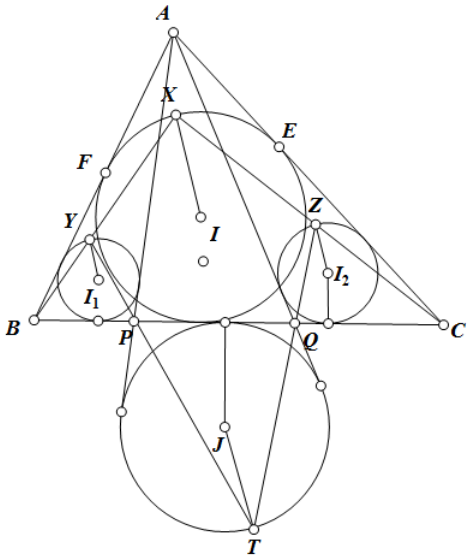
XM vậy hay là $XD=MY$.

Như vậy ta có ngay: $\dfrac{DX}{XI_1}=\dfrac{I_2Y}{YD}$(vì ta dễ thấy $\triangle I_1MX\sim MI_2Y(g.g)$) do đó thu được: $\triangle I_2YD\sim DXI_1(c.g.c)$. Do đó ta có: $\angle I_1DI_2=90^\circ$, mà $\angle I_1MI_2=90^\circ$ nên thu được: M,I_1,I_2,D đồng viên.

b)Gọi $BP \cap (I) = S', CQ \cap (I) = S''$(như hình vẽ)(chú ý $S \equiv S' \equiv S''$). Do C là tâm vị tự ngoài của $(I), (I_2)$ nên $I_2Q \| IS''$. Tương tự thì ta có: $I_1P \| IS'$. PQ là tiếp tuyến chung của $(I_1), (I_2)$ nên $I_1P \| I_2Q$. Do đó $IS' \| IS''$ vậy thu được $S \equiv S' \equiv S''$. Hay là thu được: S chạy trên (I) cố định khi M thay đổi(đpcm).

Nhận xét: Bài toán trên có câu a) khá hay với các biến đổi tỉ lệ rất đẹp nhờ vào cặp tam giác đồng dạng quen thuộc. Còn ở câu b) việc sử dụng vị tự đã giúp ta có một lời giải rất hay và có tính tổng quát cao cho nhiều bài toán khác. Tiếp tục ta đến một khai thác cho câu b) bài toán này như sau.

Bài toán 2(Nguyễn Văn Linh): Cho tam giác ABC có P, Q cố định nằm trên cạnh BC. Các đường tròn $(I), (I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp tam giác ABC, APB, APC. X thay đổi trên cung EF của (I) sao cho A, X nằm trên nửa mặt phẳng bờ EF. XB cắt (I_1) tại điểm Y và XC cắt (I_2) tại điểm Z(như hình vẽ). Chứng minh rằng giao điểm của YP và ZQ nằm trên 1 đường tròn cố định.

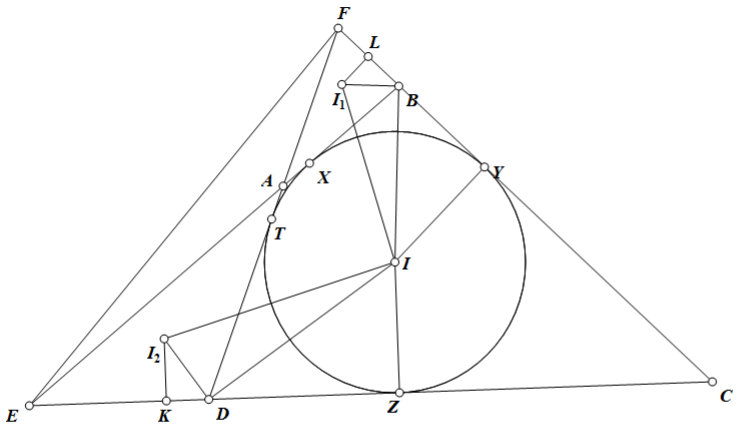


Lời giải(Cao Tiến Thành-11 Toán 1-THPT chuyên Khoa Học Tự Nhiên): Gọi (J) là đường tròn bàng tiếp tam giác APQ. Gọi YP cắt (J) tại T'. Gọi ZQ cắt (J) tại điểm T''. Ta chứng minh $T \equiv T' \equiv T''$. Thật vậy theo phép vị tự tâm P tỉ số $\dfrac{R(I_1)}{R(J)} : Y \to T'$. Do đó: $YI_1 \| JT'$. Tương tự $ZI_2 \| JT''$. Mà B, C lần lượt là tâm vị tự ngoài $(I), (I_1)$ và $(I), (I_2)$ do đó ta có: $YI_1 \| XI \| ZI_2$ do đó $JT' \| JT''$ do đó $T' \equiv T'' \equiv T$(đpcm).

Nhận xét: Đây có thể coi là một mở rộng khá đẹp của **bài toán 1**. Xong cách giải quyết vẫn là sử dụng phép vị tự một cách hợp lí.

Quay trở lại **bài toán số 1**, ở phần a) ta thấy các biến đổi tỉ số như trên rất hay xong chỉ là với đường tròn nội tiếp tam giác. Ta thử tổng quát hơn khi nghĩ tới việc thực hiện các biến đổi với tứ giác ngoại tiếp xem sao, sau một hồi mò mẫm, tôi chợt nhớ tới bài toán sau.

Bài toán 3(Nguyễn Văn Linh-T12/468-THTT): Cho tứ giác ngoại tiếp $ABCD$ có đường tròn nội tiếp (I). Tia AB cắt tia CD tại điểm E và tia DA cắt tia CB tại điểm F. Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm nội tiếp tam giác EFB và tam giác EFD. Chứng minh rằng: $\angle I_1IB = \angle I_2ID$



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Ta chú ý nếu tia AB cắt tia CD tại điểm E thuộc nửa mặt phẳng bờ AD chứa C thì ta có: DI và DI_2 là phân giác $\angle EDF$ do đó E, I, I_2 thẳng hàng. Tương tự thì F, I, I_1 cũng thẳng hàng. Do đó hiển nhiên 2 góc cần chứng minh suy biến thành góc bẹt và bằng nhau.

Vậy nên ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp tia AB cắt tia CD tại E nằm trên bờ nửa mặt phẳng BC chứa D. Xin nêu 1 bổ đề phụ (Định lí **Pythot suy rộng cho tứ giác lõm**): "Cho tứ giác $ABCD$ ngoại tiếp đường tròn (I). Giả sử tia AB cắt CD tại E và tia DA cắt tia BC tại điểm F. Khi đó ta có: $ED - FB = EB - FD$" (Bạn đọc tự chứng minh).

Quay trở lại bài toán, gọi K, L lần lượt là hình chiếu của I_2và I_1 lên ED và FB. Gọi X, Y, Z, T lần lượt là các tiếp điểm của (I) với AB, BC, CD, DA. Do I_2D là phân giác ngoài góc FDC nên $I_2D \perp ID$ tương tự $\angle I_1BI = 90^\circ$. Do đó đpcm tương đương với: $\triangle I_2ID \sim \triangle I_1IB$ hay $\frac{I_2D}{DI} = \frac{I_1B}{BI}$. Ta có: $\angle KI_2D = 90^\circ - \frac{\angle FDE}{2} = \frac{\angle FDC}{2} = \angle IDZ$ do đó ta có: $\triangle I_2DK \sim \triangle DIZ(g.g)$ hoàn toàn tương tự ta có:$\triangle I_1BL \sim \triangle BIY(g.g)$ vậy nên ta thu được từ trên rằng: $\frac{I_2D}{ID} = \frac{DK}{IZ}$ và $\frac{I_1B}{IB} = \frac{BL}{IY}$ do đó đpcm tương đương với: $DK = BL$(nhờ $IY = IZ$). Ta dễ thấy $KD = \frac{DF + DE - EF}{2}$ và $LB = \frac{EB + FB - EF}{2}$ do đó đpcm tương đương với $DE - FB = EB - FD$(đúng theo bổ đề). Vậy ta thu được đpcm.

Nhận xét: Việc sử dụng định lí *Pythot* ở đây là hợp lí nhằm kết nối giả thiết tứ giác ngoại tiếp và quan trọng hơn là chứng minh được hệ thức độ dài quan trọng: $DK = BL$. Và dĩ nhiên đến đây chắc các bạn cũng hiểu cảm hứng sáng tác của tác giả **bài toán số 4** đến từ **bài toán số 1** khi trong lời giải đó cũng sử dụng biến đổi để dẫn tới việc có được hệ thức độ dài mấu chốt.

Tổng kết lại ta thấy cả hai ý trong **bài toán 1** này đều kiểm tra được đại đa số các kĩ năng của học sinh về phần hình học phẳng(biến hình, biến đổi đại số, biến đổi góc) do đó đây là một bài toán rất ý nghĩa và có nhiều khai thác thú vị**(bài toán 2,3)**. Cuối cùng để các bạn luyện tập xin đề nghị hai bài toán cũng là những bài toán có cấu hình, phương pháp tương tự.

Bài toán 4(Trích đề chọn đội tuyển TPHCM 2016-2017): Cho tam giác ABC ngoại tiếp (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. Gọi AD, BE, CF cắt nhau ở T. Đường tròn (O_1) qua T tiếp xúc AB, AC lần lượt tại các điểm A_1, B_1. Định nghĩa tương tự các điểm A_2, B_2 và A_3, B_3. Chứng minh rằng 6 điểm $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ đồng viên.

Bài toán 5(Nguyễn Minh Hà-T12/460-THTT): Cho tam giác ABC và 1 điểm D chạy trên cạnh BC. Gọi $(I_1), (I_2)$ lần lượt là đường tròn nội tiếp của các tam giác ABD, ACD. (I_1) lần lượt tiếp xúc AB, BD tại E, X. (I_2) lần lượt tiếp xúc AC, CD tại F, Y. Gọi AI_1, AI_2 theo thứ tự cắt EX, FY tại Z, T. Chứng minh rằng:

a)X, Y, Z, T đồng viên.

b)K chạy trên một đường thẳng cố định.