Kĩ thuật sử dụng định lí Menelaus trong giải một số bài toán hình học

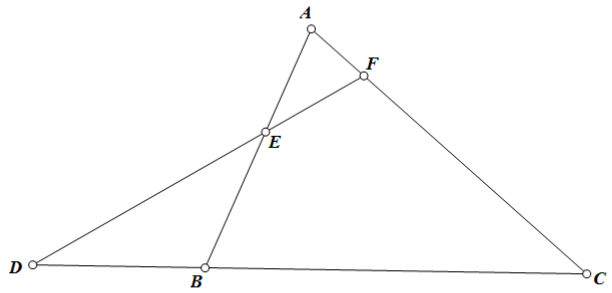
Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Tóm tắt nội dung: Nhìn chung gần đây các bài toán sử dụng định lí Menelaus xuất hiện khá thường xuyên trong các kì thi học sinh giỏi. Chính vì lẽ đó trong bài viết này tôi muốn giải quyết một số bài toán như vậy nhằm giúp các bạn dễ định hướng hơn khi làm bài. Việc sử dụng định lí $Menelaus$ như là một cầu nối rất quan trọng trong các bài toán nhằm giúp tạo các điểm thẳng hàng và nhất là giúp tạo các hệ thức quan trọng mà khi ta biến đổi thông thường thì bị *vòng quanh* luẩn quẩn. Trong bài viết này tôi chú ý chủ yếu phân tích tới kĩ thuật xử lí bằng $Menelaus$.

Để tiện theo dõi xin nêu lại định lí $Menelaus$ dưới dạng độ dài đại số:

Định lí Menelaus: Cho tam giác ABC và các điểm D, E, F lần lượt thuộc BC, AB, CA. Khi đó D, E, F thẳng hàng $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{DC}}{\overline{DB}}.\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EA}}.\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FC}} = 1$.

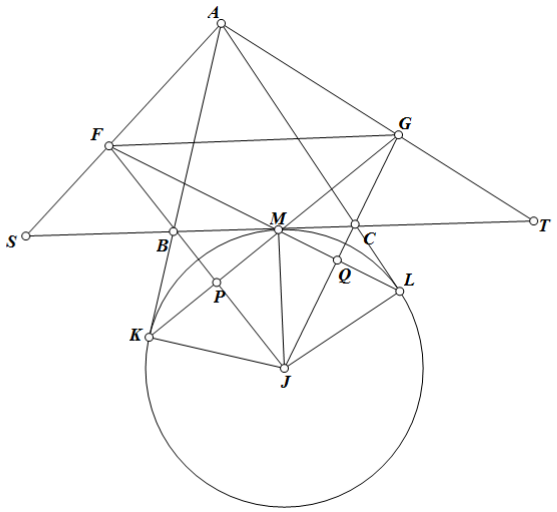
Các bạn cấp THCS có thể hiểu đơn giản các hệ thức độ dài đại số trên qua hình vẽ sau:



Việc chứng minh lại định lí xin nhường lại cho bạn đọc. Ở đây tôi xin nêu ngay các ứng dụng của định lí này trong giải toán. Kĩ thuật sử dụng định lí $Menelaus$ đầu

tiên là để tạo liên hệ độ dài từ các điểm thẳng hàng.

Bài toán 1(IMO 2012): Cho tam giác ABC và (J) là đường tròn bàng tiếp góc A của tam giác ABC. (J) tiếp xúc BC, CA, AB tại M, L, K. $LM \cap JB = F$. $KM \cap JC = G$. Gọi AF và AG cắt BC tại S và T. Chứng minh rằng M là trung điểm ST.



Lời giải: Gọi JB cắt MK tại P và JC cắt ML ở Q. Ta có $\angle BPM = \angle MQC = 90^\circ$ do đó ta thu được rằng tứ giác $FPQC$ nội tiếp suy ra $\angle FGM = \angle MQP = \angle MJP = \angle MKB$. Chú ý rằng $BK = BM$ nên ta có $\angle BKM = \angle BMK$ do đó $\angle FGM = \angle GMC$ nên ta thu được $FG \| BC$ hay là $FG \| ST$.

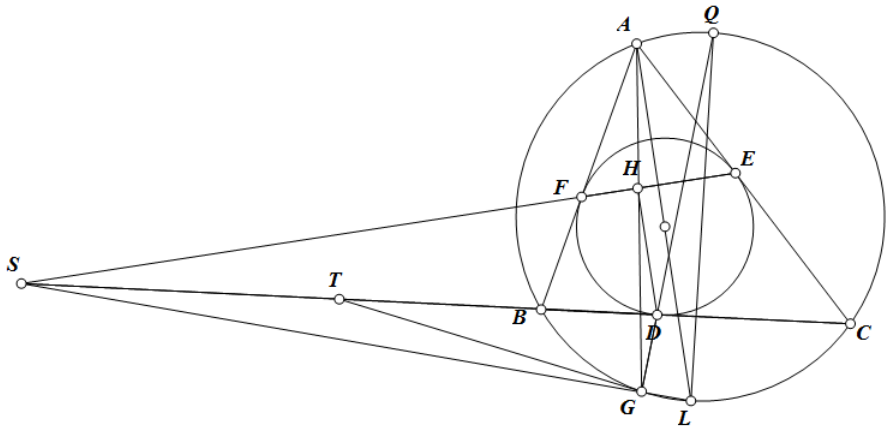
Áp dụng định lí $Menelaus$ cho cát tuyến KMG của tam giác ABT thế thì ta có: $\frac{KA}{KB}.\frac{MB}{MT}.\frac{GA}{GT} = 1(*)$.

Áp dụng định lí $Menelaus$ cho cát tuyến LMF của tam giác ACS thế thì ta có: $\frac{LA}{LC}.\frac{MC}{MS}.\frac{FA}{FS} = 1(**)$.

Chia $(*)$ cho $(**)$ ta có ngay $MT = MS$ (chú ý $KA = MB; LC = CM; KA = KL = \frac{1}{2}(AB + AC + BC)$ và do $FG \| ST$ nên $\frac{GA}{GT} = \frac{FA}{FS}$(theo định lí $Thales$) từ đó suy ra $MT = MS$) (đpcm).

Tiếp tục tôi sẽ giới thiệu chùm một số bài toán liên quan tới tiếp điểm đường tròn $Mixtilinear$ nội góc A. Từ đây các bạn sẽ thấy tư duy điểm trùng kết hợp định lí $Menelaus$ cực kì phổ biến.

Bài toán 2(OLP Duyên Hải Bắc Bộ 2012-2013): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) và ngoại tiếp đường tròn (I). (I) tiếp xúc BC, CA, AB lần lượt tại D, E, F. H là chân đường vuông góc hạ từ D xuống EF. AH cắt lại (O) tại điểm G. Tiếp tuyến (O) tại G cắt BC tại T. Chứng minh rằng: $\triangle TGD$ cân.



Lời giải: Gọi EF cắt BC tại điểm S. Áp dụng định $Menelaus$ thì ta có:

$\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}.\frac{\overline{FB}}{\overline{FA}}.\frac{\overline{EA}}{\overline{EC}} = 1$, do đó: $\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}$ vậy hiển nhiên là $(SD, BC) = -1$ do đó thấy rằng: GS, GD lần lượt là phân giác trong và ngoài $\angle BGC$. Gọi T' là trung điểm của GD. Từ trên ta thấy: SG đi điểm L là điểm chính giữa cung BGD của (O) và GD đi qua điểm chính giữa cung BAC của (O) là Q. Do QL đi qua O nên QL là đường kính (O), do đó $\angle DGS = 90^\circ$.

Vậy từ gt ta có $HDGS$ là 1 tứ giác nội tiếp nhận T' là tâm. Áp dụng hệ thức $Newton$ thì ta có: $T'D^2 = \overline{T'B}.\overline{T'C} = T'G^2$ vậy $T'G$ cũng là tiếp tuyến tới (O) dẫn tới $T \equiv T'$. Do đó ta có: $TD = TG$ hay tam giác TDG cân tại T(đpcm).

Các bạn có thể thấy tính chất khá thú vị của điểm G trong bài toán này. Đó chính là điểm tiếp xúc với (O) của đường tròn $Mixtilinear$ nội góc A. Ở bài toán trên việc tôi sử dụng định $Menelaus$ đã giúp tạo mối liên kết các giả thiết vòng quanh khó chịu. Tiếp tục là một bài toán tương đương.

Bài toán 3: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Phân giác ngoài góc A

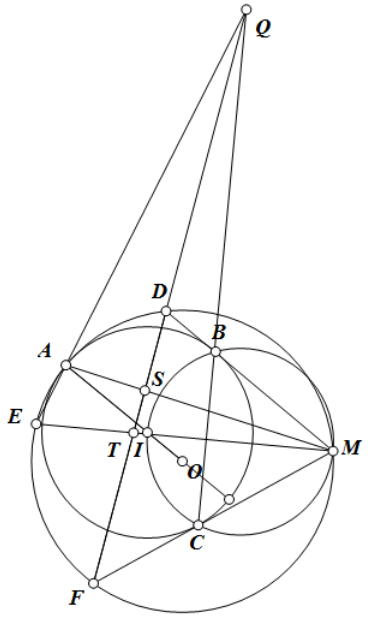
cắt lại (O) tại điểm thứ hai là G. (I) tiếp xúc BC, CA, AB tại D, E, F. GD cắt lại (O) tại H. AH cắt EF tại điểm K. Chứng minh rằng: $DK \perp EF$.

Giả thiết ở *bài toán 4* có vẻ khá lạ xong thực ra lại quen thuộc, việc xử lí vẫn là sử dụng điểm trùng cùng định lí $Menelaus$.

Bài toán 4(Hà Nội TST 2011): Cho đường tròn (O) và các điểm A, M trên (O) sao cho AM không là đường kính (O). Lấy I trên đoạn $OA(I \neq O, A)$. (I, IA) cắt đường tròn đường kính (IM) tại các điểm B, C. MB, MI, MC cắt (O) lần lượt tại các điểm D, E, F theo thứ tự. DF cắt ME, MA, AE lần lượt tại T, S, Q. Chứng minh rằng:

a)$SD.SF = ST.SQ$.

b) B, C, Q thẳng hàng.



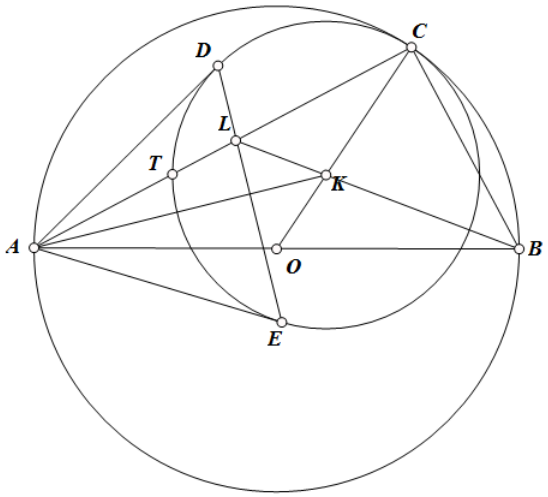
Lời giải(Nguyễn Duy Khương): a) Ta có: $\angle QAM = \angle MFE = \angle QTM$ do đó hiển nhiên rằng: tứ giác $AQTM$ nội tiếp hay là ta thu ngay được rằng: $ST.SQ = SA.SM = SD.SF$ (đpcm).

b) Hiển nhiên ta có ngay được rằng do (IM) cắt $(I; IA)$ tại điểm B, C nên MB, MC

là tiếp tuyến đến (I, IA). Ta nhận thấy do I nằm trên OA nên (I, IA) tiếp xúc (O) tại A. MI chính là phân giác góc BMC hay suy ra rằng E chính là trung điểm cung DAF của (O). Ta quy về bài toán mới chứng minh rằng: AE, DF, BC đồng quy. Gọi BC cắt DF tại điểm Q'. Theo định lí $Menelaus$ thì $\frac{Q'F}{Q'D}.\frac{BD}{BM}.\frac{CM}{CF} = 1$ do đó dẫn tới: $\frac{Q'F}{Q'D} = \frac{CF}{BD}$ (vì $CM = BM$). Ta dễ thấy rằng: EB và EC lần lượt đi qua trung điểm cung DM, MF không chứa E của (O) (tính chất quen thuộc về đường tròn $Mixtilinear$). Do đó theo tính chất đường phân giác ta có: $\frac{AD}{AM} = \frac{BD}{BM}$ đồng thời $\frac{AF}{AM} = \frac{CF}{CM}$ suy ra ngay rằng $\frac{AF}{AD} = \frac{CF}{BD} = \frac{Q'F}{Q'D}$ hiển nhiên ta thu được rằng AQ' là phân giác ngoài $\angle DAF$ do đó AQ' đi qua trung điểm cung DAF của (O) chính là E hay là: $Q \equiv Q'$ do đó ta có: AE, DF, BC đồng quy. Vậy ta có được đpcm.

Giả thiết này quay lại một lần nữa trong đề chọn đội tuyển VMO của **Hà Nội** năm 2015-2016.

Bài toán 5(Hà Nội TST 2015-2016): Cho đường tròn đường kính AB. Lấy điểm C trên nửa đường tròn này sao cho $90^\circ < \angle AOC < 180^\circ$. Lấy K là 1 điểm thay đổi trên đoạn OC. Vẽ các tiếp tuyến AD, AE đến đường tròn $(K; KC)$. Chứng minh rằng DE, AC, BK đồng quy tại 1 điểm.



Lời giải(Ngô Thế Anh Khoa-12T1-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam): Gọi AC cắt đường tròn (K) tại điểm T,giao BK tại điểm L. Do C là tâm vị tự trong của (O) và (K) nên ta có: $\dfrac{AT}{TC}=\dfrac{OK}{KC}$. do đó ta có: $TK\|AB$. Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác LAB với cát tuyến $\overline{OKC}$ ta có:

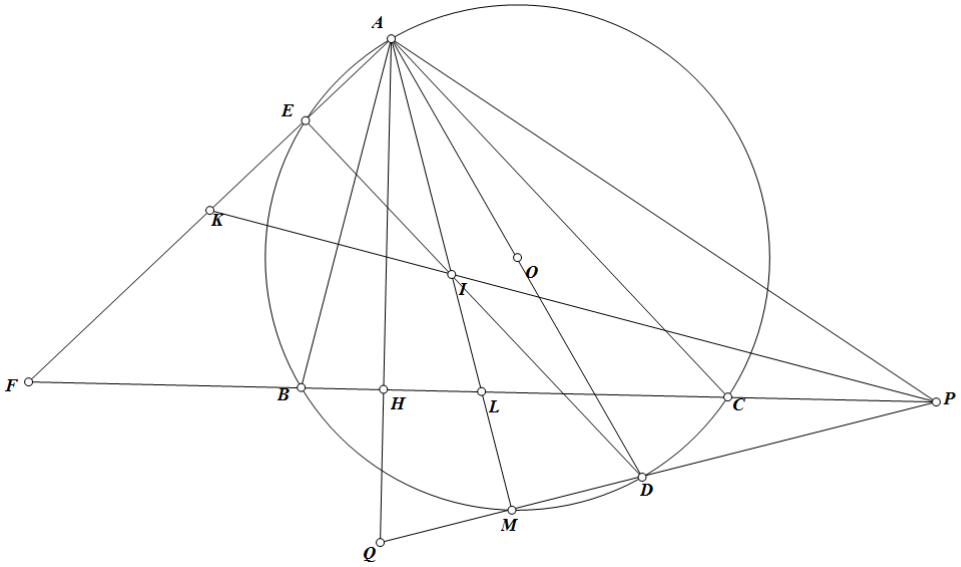
$\dfrac{CL}{CA}.\dfrac{OA}{OB}.\dfrac{KB}{KL}=1$. Do $TK\|AB$ nên ta có: $\dfrac{CL}{CA}=\dfrac{TL}{TA}$ do đó: $(AL,TC)=-1$. Mặt khác nếu gọi DE cắt AC tại điểm L' thế thì $(AL'TC)=-1$ do đó $L\equiv L'$ do đó ta có: DE,BK,AC đồng quy(đpcm).

Cuối cùng chúng ta sẽ đến với bài toán sử dụng định lí $Menelaus$ mà tôi thấy thâm thuý nhất. Từ đây như đã nói ở đầu bài viết việc sử dụng định lí này nhằm giúp ta xử lí các hệ thức độ dài quan trọng bị vòng quanh khi biến đổi thông thường.

Bài toán 6(Trích đề chọn đội tuyển Hà Tĩnh 2015-2016): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có AH là đường cao và I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ BC. D đối xứng A qua O. MD cắt BC,AH lần lượt tại các điểm P,Q.

a) Chứng minh rằng tam giác IPQ vuông.

b) DI cắt (O) tại điểm thứ hai là E. AE, BC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng nếu $AB + AC = 2BC$ thì I là trọng tâm tam giác APF.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): a) Ta thấy rằng: $\angle AHC = \angle AMP = 90^\circ$ do đó $\angle HAM = \angle HPM$. Chú ý rằng ta dễ chứng minh được AH, AO đẳng giác trong tam giác ABC do đó AI là phân giác góc QAD hay $\angle MAD = \angle MCD = \angle MPC$ do đó $\triangle MCD \sim \triangle MPC(g.g) \Rightarrow MC^2 = MD.MP = MB^2 = MI^2$(do M là trung điểm cung nhỏ BC). Do $\overline{A, I, M} \perp QD$ nên tam giác QAD cân hay là $MQ = MD$ do đó $MI^2 = MQ.MD$ hay theo hệ thức lượng trong tam giác vuông thì tam giác IPQ vuông tại I(đpcm).

b) Trước tiên ta để ý rằng: $\angle IAE = \angle IDM = \angle IQD = \angle IHP$ hay là tứ giác $AIHF$ nội tiếp. Gọi K là trung điểm AF. Ta có: $\angle KIA = \angle KAI = \angle IHL = \angle IQP = \angle MIP$ hay là P, I, K thẳng hàng. Gọi $AM \cap BC = L$, ta có: $\frac{LI}{IA} = \frac{LC}{CA} = \frac{LB}{AB} = \frac{BC}{CA + AB} = \frac{1}{2}$. Áp dụng định lí $Menelaus$ cho tam giác ALF với cát tuyến $\overline{PIK}$ thì $\frac{PF}{PL}.\frac{IL}{IA}.\frac{KA}{KF} = 1$ suy ra $\frac{PF}{PL} = 2$ do đó L là trung điểm PF. Vậy hiển nhiên thu được I là trọng tâm tam giác APF(đpcm).