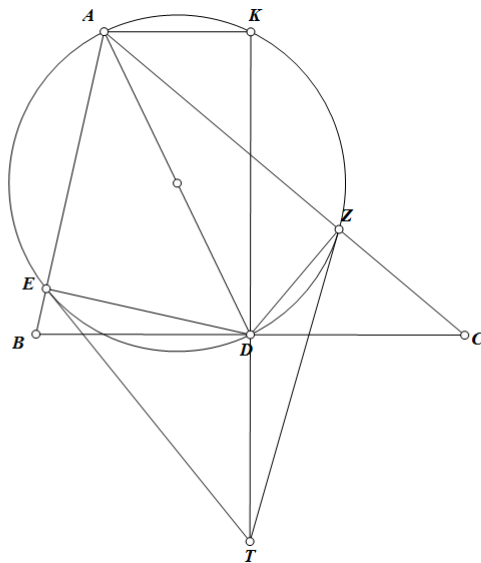


Tuyển tập các bài toán hình học phẳng chọn đội tuyển VMO các năm gần đây(Phần 2)

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Tóm tắt nội dung: Ở phần 1, tôi đã giới thiệu với các bạn 12 bài toán cùng các lời giải của chúng trong một số đề chọn đội tuyển VMO các tỉnh thành trong cả nước. Phỏng theo nguyện vọng của nhiều bạn tôi tiếp tục làm phần 2 của tuyển tập này. Mỗi phần tôi sẽ lấy một số bài toán hình học chọn đội tuyển của một số tỉnh, trường để đăng các lời giải. Trong phần này tôi xin giới thiệu một số bài toán chọn tuyển năm 2010-2011. Để hoàn thành phần này rất cảm ơn anh **Lê Phúc Lữ** đã viết tuyển tập "*Tuyển chọn các bài Toán Hình học phẳng trong các đề thi chọn đội tuyển các tỉnh thành 2010-2011*". Đó là một tài liệu hết sức giá trị, thiếu nó tôi không thể hoàn thiện rất nhiều bài viết.

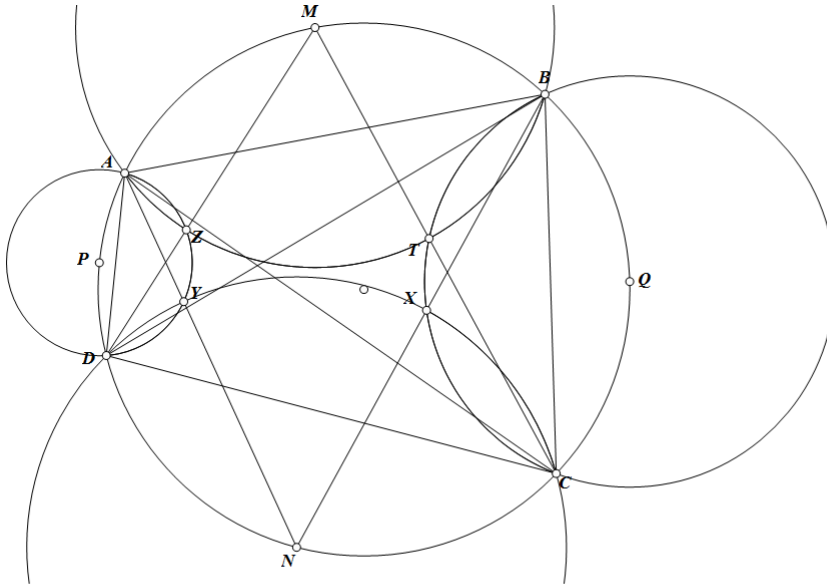
Bài toán 1(Chọn đội tuyển Nam Định năm 2010-2011): Cho tam giác ABC có trung điểm cạnh BC là D . E, Z là hình chiếu của D lên AB, AC . Gọi T là giao điểm các tiếp tuyến tại E, Z của đường tròn đường kính AD . Chứng minh rằng: $TB = TC$.



Lời giải: Gọi TD cắt lại (AD) tại điểm thứ hai là K . Khi đó tứ giác $EDZK$ điều hoà nên thu được: $A(KD, EZ) = -1 = A(KD, BC)$ mà AD chia đôi BC nên $AK \parallel BC$. Vậy là $TD \perp BC$ do đó $TB = TC$ (đpcm).

Nhận xét: Bài toán này khá đơn giản về mặt ý tưởng và được lấy lại y nguyên trong kì thi **VMO 2016**. Các bạn có thể giải bằng định lí *con bướm*.

Bài toán 2 (Chọn đội tuyển HSG chuyên Nguyễn Du, Đắc Lắc 2010-2011): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi X, Y, Z, T lần lượt là tâm nội tiếp của các tam giác BCD, CDA, DAB, ABC . Chứng minh rằng: $XYZT$ là 1 hình chữ nhật.

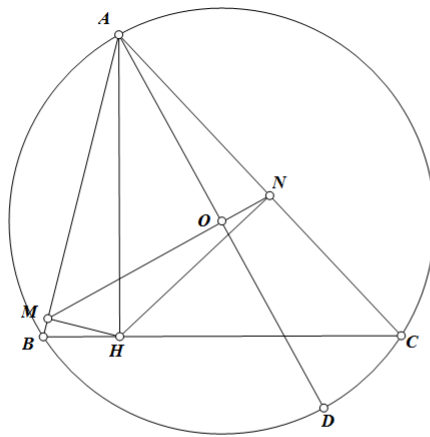


Lời giải (Nguyễn Duy Khương): Trước khi giải ta nêu lại không chứng minh bổ đề quen thuộc sau: "Cho tam giác ABC nội tiếp (O) có tâm nội tiếp I . $AI \cap (O) = A, D$. Khi đó $DB = DC = DI$."

Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cung nhỏ AB, CD, AD, BC của (O) . Áp dụng bổ đề ta có: $AYZD$ nội tiếp đường tròn tâm P , tương tự các tứ giác $AZTB, BTXC, DYXC$ cũng nội tiếp. Lại có: $\angle YZT = \angle DZB - \angle DZY - \angle TZB = \angle DZB - \angle DAY - \angle TAB = \angle DZB - \frac{\angle DAC}{2} - \frac{\angle CAB}{2} = 90^\circ + \frac{\angle DAB}{2} - \frac{\angle DAB}{2} = 90^\circ$. Hoàn toàn tương tự: $\angle ZYX = 90^\circ = \angle ZTX$. Vậy thu được $XYZT$ là 1 hình chữ nhật (đpcm).

Nhận xét: Tôi đánh giá cao bài toán này bởi tính đối xứng rất đẹp cùng cách giải cộng góc toàn tập.

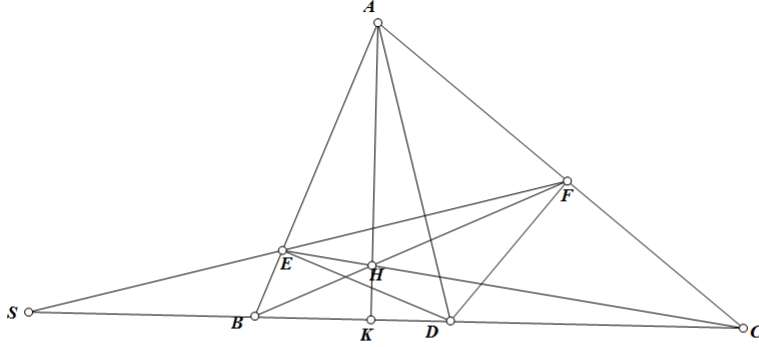
Bài toán 3(Chọn HSG Hải Phòng 2010-2011): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có đường cao $AH = R\sqrt{2}$. Gọi M, N lần lượt là chân đường vuông hạ từ H xuống AB, AC . Chứng minh rằng: M, O, N thẳng hàng.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi AD là đường kính của (O) . Ta thấy rằng theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AHB, AHC thì: $AH^2 = AM.AB = AN.AC = 2R^2 \Rightarrow AN.AC = AO.AD = AM.AB$ do đó suy ra: $\triangle AON \sim \triangle ACD(c.g.c)$ đồng thời $\triangle AOM \sim \triangle ABD(c.g.c)$ hay là: $\angle AON = \angle AOM = 90^\circ$. Hay là M, O, N thẳng hàng.

Nhận xét: Bài toán này từng xuất hiện lại trên báo **TTT2** vào **số 129** ở mục Thi giải Toán qua thư.

Bài toán 4(Thi chọn đội tuyển Nghệ An 2010-2011): Cho tam giác ABC có phân giác trong AD . E, F lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC . Gọi $H = BE \cap CF$. Chứng minh rằng: $AH \perp BC$.

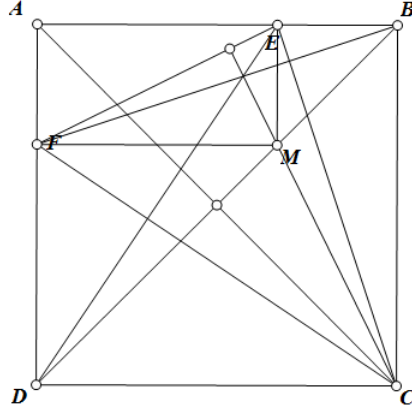


Lời giải: Gọi AK là đường cao của tam giác ABC . Thế thì: A, E, K, D, F đồng viên đường tròn đường kính AD . Dễ thấy AD cũng là phân giác $\angle EDF$. Do đó $\angle EKA = \angle FKA$ hay là AK là phân giác góc EKF . Thế thì hiển nhiên suy ra: $K(AS, EF) = -1$ hay là $(KS, BC) = -1$. Gọi AH cắt BC tại K' thì áp dụng chùm điều hoà cơ bản có: $(K'S, CB) = -1$ do đó $K \equiv K'$ hay là $AH \perp BC$ (đpcm).

Nhận xét: Bài toán trên khá cơ bản với việc sử dụng hàng điểm.

Bài toán 5(Chọn đội tuyển VMO Quảng Bình ngày 1-2010-2011): Cho hình vuông $ABCD$. Trên đoạn BD lấy điểm M khác B, D . E, F lần lượt là hình chiếu của M lên AB, AD . Chứng minh rằng:

- $CM \perp EF$.
- CM, BF, DE đồng quy.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): a) Theo định lí *Pythagoras* thì: $CF^2 = CD^2 + DF^2$ và $CE^2 = BC^2 + EB^2$ do đó $CF^2 - CE^2 = DF^2 - EB^2$. Mà ta thấy rằng các tam giác vuông MEB, MDF có một góc 45° nên $EB = ME, MF = EF$. Do đó thu được: $DF^2 - EB^2 = MF^2 - ME^2 = CF^2 - CE^2$ áp dụng định lí 4 điểm ta có: $CM \perp EF$ (đpcm).

b) Theo định lí *Pythagoras* ta có: $EF^2 = EM^2 + MF^2 = EB^2 + AE^2, CF^2 = DF^2 + CD^2$. Vậy nên: $EF^2 - EB^2 = AE^2, CF^2 - CB^2 = DF^2$. Vậy mà $AEMF$ là 1 hình chữ nhật nên $AE = MF = DF$ do đó $EF^2 - EB^2 = CF^2 - CB^2$ áp dụng định lí 4 điểm $CE \perp FB$. Chứng minh tương tự $DE \perp CF$. Do đó BF, DE, CM lần lượt là các đường cao của tam giác CEF nên chúng đồng quy(đpcm).

Nhận xét: Bài toán này không khó xong tôi rất ấn tượng bởi cách sắp xếp giả thiết hết sức thú vị cũng như số tư tưởng giải bài toán này cực kì phong phú. Trên đây đơn giản là cách tôi thích nhất trong số các cách giải của bài này.