

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI VMO 2017

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Trần Quang Hùng

Lê Phúc Lữ – Nguyễn Văn Huyện

1. Lời nói đầu

Vậy là đã 7 năm chúng tôi đồng hành cùng các cuộc thi toán với những bài *Giải và bình luận đề thi VMO và TST* như một cố gắng đóng góp cho cộng đồng những tài liệu chất lượng, bổ ích.

Đó không chỉ là công sức của nhóm tác giả mà còn là tổng hợp trí tuệ của cả cộng đồng với những lời giải hay, độc đáo, những nhận xét, đánh giá, bình luận, mở rộng, liên hệ bổ ích. Vì thế, mỗi tài liệu *Giải và bình luận* không chỉ là lời giải của 6, 7 bài toán gộp lại, mà là các phân tích, liên hệ sâu sắc có ích cho các thầy cô giáo và các bạn học sinh trong việc học tập, giảng dạy.

Tài liệu giải và bình luận đề thi năm nay cũng được biên soạn để dành tặng cho tất cả các thầy cô giáo, các bạn học sinh, đặc biệt là cho các bạn học sinh sẽ còn cơ hội tiếp tục tham gia các kỳ thi học sinh giỏi THPT.

Nhân đây, chúng tôi cũng công bố dự định trong năm nay sẽ phối hợp với Sputnik Education xuất bản cuốn sách: *7 năm VMO 2011-2017 – Lời giải và bình luận*. Hy vọng đó sẽ là một cuốn sách được đón nhận nồng nhiệt.

2. Thông tin bản quyền

Bản quyền thuộc về tất cả các thành viên trong nhóm biên soạn (Trần Nam Dũng, Võ Quốc Bá Cẩn, Trần Quang Hùng, Lê Phúc Lữ, Nguyễn Văn Huyện).

Đây là thành quả của quá trình lao động miệt mài của nhóm để chia sẻ đến cộng đồng. Mọi người đều có thể xem tài liệu MIỄN PHÍ. Tuy nhiên, vui lòng ghi rõ nguồn khi chia sẻ.

Tất cả các hoạt động mua bán, kinh doanh liên quan đến tài liệu này mà không được sự chấp thuận của nhóm là trái pháp luật. Chúng ta hãy lên án những hành vi vi phạm bản quyền để bảo vệ quyền lợi của các tác giả, của những sản phẩm trí tuệ. Xin cảm ơn.

3. Đề thi

3.1. Ngày thi thứ nhất (05/01/2017)

Bài 1 (5.0 điểm). Cho a là một số thực và xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

- a) Khi $a = 5$, chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
 b) Tìm tất cả các giá trị của số a để dãy số (u_n) xác định và có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5.0 điểm). Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn

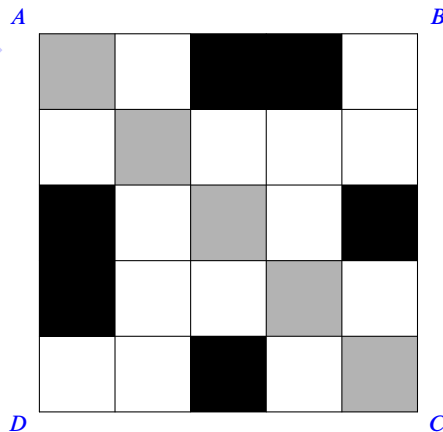
$$P\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = 1 + \sqrt[3]{2} \quad \text{và} \quad P\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1 + 3\sqrt{5}?$$

Bài 3 (5.0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B, C ; AH cắt (O) tại D (D khác A).

- a) Gọi I là trung điểm của AH ; EI cắt BD tại M và FI cắt CD tại N . Chứng minh rằng $MN \perp OH$.
 b) Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt tại P, Q (P và Q khác D). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) và AO lần lượt tại R và S (R và S khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.

Bài 4 (5.0 điểm). Cho số nguyên $n > 1$. Bảng ô vuông $ABCD$ kích thước $n \times n$ gồm n^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được tô bởi một trong ba màu: đen, trắng, xám. Một cách tô màu được gọi là *đối xứng* nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được tô màu xám và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được tô cùng màu đen hoặc cùng màu trắng. Người ta điền vào mỗi ô xám số 0, mỗi ô trắng một số nguyên dương và mỗi ô đen một số nguyên âm. Một cách điền số như vậy được gọi là k – cân đối (với k nguyên dương) nếu thỏa mãn điều kiện sau

- i) Mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số nguyên thuộc đoạn $[-k, k]$.
 ii) Nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô đen thì tập các số nguyên dương được điền trên hàng đó và tập các số nguyên dương được điền trên cột đó không giao nhau; nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô trắng thì tập các số nguyên âm được điền trên hàng đó và tập các số nguyên âm được điền trên cột đó không giao nhau.
 a) Với $n = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại cách điền số k – cân đối cho cách tô màu đối xứng ở hình bên dưới.



- b) Với $n = 2017$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô màu đối xứng, luôn tồn tại cách điền số k – cân đối.

3.2. Ngày thi thứ hai (06/01/2017)

Bài 5 (6.0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy$$

với mọi số thực x, y .

Bài 6 (7.0 điểm). Chứng minh rằng

a) $\sum_{k=1}^{1008} k C_{2017}^k \equiv 0 \pmod{2017^2}.$

b) $\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}.$

Bài 7 (7.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và G là một điểm thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa O của đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác OBC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABG cắt AC tại E , đường tròn ngoại tiếp tam giác ACG cắt AB tại F (E và F khác A).

- a) Gọi K là giao điểm của BE và CF . Chứng minh rằng AK , BC và OG đồng quy.
- b) Cho D là một điểm thuộc cung $\widehat{BOC}$ chứa O của đường tròn (I) ; GB cắt CD tại M , GC cắt BD tại N . Giả sử MN cắt (O) tại hai điểm P, Q . Chứng minh rằng khi G thay đổi trên cung $\widehat{BC}$ không chứa O của đường tròn (I) , đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định.

4. Bình luận chung

Về cấu trúc, đề thi gồm 7 bài toán. Ngày đầu có 4 bài, mỗi bài được 5 điểm thuộc 4 phân môn: Giải tích, đại số, hình học, tổ hợp. Ngày thứ hai có ba bài thuộc ba phân môn: Đại số, số học, tổ hợp với số điểm tương ứng là 6, 7, 7.

Đề thi ngày thứ nhất, trừ bài cuối là khá cơ bản và quen thuộc.

- Bài 1** là bài giải tích yêu cầu khảo sát sự hội tụ của một dãy truy hồi dạng $x_{n+1} = f(n, x_n)$. Về nguyên tắc, dạng dãy số này khó khảo sát hơn dạng dãy truy hồi $x_{n+1} = f(x_n)$ vì các hệ số của hàm f không hằng mà biến thiên theo n . Tuy nhiên, nếu để ý $\frac{2n+3}{n+1}$ dần đến 2 khi n dần đến vô cùng thì ta có thể “quy về” dãy số dạng $x_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{x_n + \frac{1}{4}}$ và dự đoán được giới hạn bằng 3. Từ đó dùng bổ đề quen thuộc: “Nếu tồn tại số thực $q \in (0, 1)$ sao cho $x_{n+1} \leq qx_n + b_n$ với $\lim b_n = 0$ thì ta có $\lim x_n = 0$ ”, thì từ đánh giá đơn giản

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{5}{6}|u_n - 3| + \frac{6}{5(n+1)},$$

ta sẽ suy ra kết luận bài toán. Ở đây, chú ý là câu b) cũng làm hoàn toàn tương tự. Điều kiện đối với a chẳng qua là để u_2 xác định. Chú ý là dạng bài dãy số này đã xuất hiện ở hai kỳ VMO gần đây (2012 và 2015) với cùng cách giải tương tự thông qua bổ đề nói trên.

- **Bài 2** là một bài toán về xác định đa thức thoả mãn một điều kiện cho trước. Bài này nếu học sinh nắm vững lý thuyết về đa thức tối thiểu của số đại số thì sẽ giải rất nhanh. Cụ thể, ta có định lý rất cơ bản sau: *Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức đơn khởi, hệ số nguyên có chung nghiệm α và $Q(x)$ là bất khả quy thì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.*

Ta đặt $Q(x) = P(x+1) - 1$ thì $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt{5}$ tương ứng sẽ là nghiệm của đa thức $Q(x) - x$ và $Q(x) - 3x - 1$. Vì các đa thức $x^3 - 2$ và $x^2 - 5$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}$ nên từ đây sẽ suy ra ngay $Q(x) - x = (x^3 - 2)S(x)$ và $Q(x) - 3x - 1 = (x^2 - 5)T(x)$. Từ đây sẽ ra $2x + 1 = (x^3 - 2)S(x) - (x^2 - 5)T(x)$. Đến đây, chọn $x = 7$ sẽ suy ra điều mâu thuẫn vì vế phải chia hết cho 11, còn vế trái thì không.

Nếu không biết đến tính chất trên đây của đa thức thì ta sẽ vất vả hơn một chút và phải dựa vào tính chất sau:

1. Nếu A, B hữu tỷ sao cho $A + B\sqrt{5}$ thì $A = B = 0$.
2. Nếu A, B, C hữu tỷ sao cho $A + B\sqrt[3]{2} + C\sqrt[3]{4} = 0$ thì $A = B = C = 0$.

Ý tưởng dạng này đã xuất hiện trong các kỳ VMO, nhưng từ rất lâu, cụ thể là VMO 1997. Trước đó nhiều năm, VMO 1984 có bài tìm đa thức đơn khởi hệ số nguyên bậc nhỏ nhất có nghiệm là $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Chính qua những bài toán như vậy khái niệm đa thức tối thiểu (và sau này là mở rộng trường) được giới thiệu.

- **Bài 3** là một bài toán hình khá nhẹ nhàng, câu a) quy về việc chứng minh MN là trục đẳng phương của hai đường tròn (ABC) và (DEF) . Câu b) cũng là một câu hình rất quen thuộc mà trong đó có cả điểm Miquel, tứ giác điều hoà, đường đối trung, đường đẳng giác, định lý Pascal... Tuy nhiên, cách tiếp cận chân phương nhất là dùng đồng dạng, một kiến thức hoàn toàn lớp 9.
- **Bài 4**, bài toán tổ hợp là bài khó nhất của ngày thi thứ nhất, cũng là bài toán lạ nhất. Riêng việc đọc hiểu được đề bài cũng đã tốn khá nhiều thời gian, vì vậy, việc cho câu a), một tình huống rất cụ thể với bảng kích thước nhỏ là hết sức cần thiết, vừa tạo cơ hội cho học sinh kiểm điểm, vừa để học sinh “làm quen và cảm nhận” bài toán. Với câu a), chỉ cần qua vài lý luận đơn giản (chú ý đến tính đối xứng, do đó hàng i và cột i là giống nhau) là ta thấy $k = 2$ không thoả mãn yêu cầu bài toán. Như vậy, chỉ còn cần chỉ ra ví dụ với $k = 3$ là hoàn thành được câu này.

Với phần b) thì khó khăn hơn. Riêng việc đoán ra đáp số đã là không đơn giản. Thực tế, rất nhiều lời giải sai (với đánh giá $k = 2007$) đã được đưa ra (trong đó có những lời giải của người ở bên ngoài, trong điều kiện thoải mái về thời gian). Với câu này, cần tiếp tục khai thác tính đối xứng để chỉ ra một cấu hình tồn tại nhiều số nhất. Và cấu hình này chính là cấu hình tô đen trắng xen kẽ. Với cấu hình này, ta có thể suy ra ra tất cả các số dương ở nửa tam giác trên đôi một khác nhau. Suy ra $k \geq 1008 + 1008 + 1006 + 1006 + \dots + 2 + 2 = \frac{2017^2 - 1}{4}$. Để chứng minh điều kiện đủ, ta có thể sử dụng quy nạp Toán học với bước nhảy là 2. Điều này có thể giải thích được vì nếu tinh ý, chúng ta có thể đưa bài toán về mô hình đồ thị và sử dụng định lý Mantel-Turan để giải quyết.

Ngày thi thứ hai:

- **Bài 5** là một bài toán phương trình hàm có hai biến tự do và có biểu thức xy ở ngoài dấu hàm số: $f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy$. Với những phương trình hàm như vậy, điều đầu tiên mà ta cần để ý khai thác, đó là tính song ánh của hàm số. Sau đó ta xem có xảy ra trường hợp $f(0) = 0$ hay không, hay là $f(0) = c \neq 0$ và tồn tại $u \neq 0$ để $f(u) = 0$. Từ đây tiếp tục thể một cách thích hợp sẽ tìm được $f(x) = 1 - x$ là hàm số duy nhất thoả mãn yêu cầu bài toán. Đáng chú ý, bài toán này có hình thức khá giống với đề Olympic của Brazil năm 2006. Cách giải của hai bài toán cũng khá giống nhau. Đề bài Brazil 2006 như sau

Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thoả mãn

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$$

với mọi số thực x, y .

- **Bài 6** là một bài toán số học liên quan đến tính chất của số nguyên tố. Điều này cũng được nhiều người dự đoán trước, vì cũng lâu rồi mới có một năm nguyên tố (từ đầu thế kỷ 21 đến nay mới chỉ có ba năm như vậy: 2003, 2011 và 2017). Thú vị là 2017 là số duy nhất trong ba số nguyên tố đầu thế kỷ có dạng $4k + 1$, nhờ đó mà mới có kết quả câu b). Dưới đây ta thay 2017 bằng số nguyên tố $p = 4k + 1$ bất kỳ.

Câu a) khá đơn giản vì tổng $\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k C_n^k$ rút gọn được

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} k C_p^k &= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} p C_{p-1}^{k-1} = p \sum_{k=0}^{\frac{p-3}{2}} C_{p-1}^k = p \left(\frac{\sum_{k=0}^{p-1} C_{p-1}^k - C_{p-1}^{\frac{p-1}{2}}}{2} \right) \\ &= p \left(\frac{2^{p-1} - C_{p-1}^{\frac{p-1}{2}}}{2} \right). \end{aligned}$$

Tiếp theo là nhiệm vụ của số học với định lý nhỏ Fermat và tính chất của $C_{p-1}^k \pmod p$ (cụ thể ta có $C_{p-1}^k \equiv (-1)^k \pmod p$). Ở câu b), ta cũng thực hiện phép rút gọn tổng bằng cách thay $C_p^k = C_{p-1}^{k-1} + C_{p-1}^k$ thì rút gọn được tổng về phải bằng $(-1)^{\frac{p-1}{4}} C_{p-1}^{\frac{p-1}{4}} - 1$. Vấn đề tiếp theo là vấn đề số học liên quan đến các tính chất khá sâu sắc của số nguyên tố, hệ số C_n^k , tức là nhóm định lý Wilson, Wolstenhome, Babbage.

- **Bài 7** là một bài hình học khó có tính phân loại cao, đặc biệt là ở câu b). Ở câu a) bài toán vẫn khai thác các vấn đề quen thuộc như điểm Miquel, trục đẳng phương và tâm đẳng phương, và đa số thí sinh đã giải quyết được vấn đề nhưng sang đến câu b) thì dường như chỉ có các cao thủ hình học mới đủ sức xử lý. Có lẽ bài toán được lấy ý tưởng dựa trên các phương pháp điều hoà và xạ ảnh.

Tóm tắt lại, nếu đánh giá về độ khó thì đề năm nay khá dễ chịu, có nhiều câu thí sinh có thể làm được như câu 1, 2, 3, 5. Ngay cả với những bài khó hơn như 4, 6, 7 cũng có ý để ăn điểm như câu 4a, ý điều kiện cần của câu 4b), câu 6a, ý rút gọn của câu 6b), câu 7a. Về độ mới và hay thì các bài 1, 2, 5 có ý khá cũ. Sự lặp đi lặp lại của ý tưởng bài 1 cho thấy lỗi mòn trong việc khai thác

đề tài giải tích. Tại sao lại phải là dãy số và giới hạn mà không phải là những vấn đề rộng hơn như sự liên tục, ứng dụng của đạo hàm bậc nhất, bậc 2? Bài 3 không mới nhưng đặt vấn đề đẹp và phù hợp trong bối cảnh ngày thi có 4 bài. Bài 6 cũng là một bài không mới, với ý rút gọn các tổng. Phần số học của bài này sẽ tạo thuận lợi cho các đội mạnh, nơi các học sinh được trang bị kiến thức đầy đủ hơn về các tính chất của số nguyên tố (như các định lý nêu trên trong phần bình luận về bài 6 cùng các phương pháp chứng minh của chúng). Hai bài toán đẹp nhất và cũng khó nhất của đề thi là bài số 4 và số 7, trong đó bài 4 khai thác cách phát biểu thú vị về dạng đồ thị lưỡng phân, còn bài 7 là các tính chất xạ ảnh đẹp dễ và sâu sắc.

Với những nhận xét và đánh giá trên, theo chúng tôi, sẽ rất khó dự đoán điểm chuẩn chính xác, vì khu vực 15 đến 20 điểm sẽ rất dày đặc. Trong 7 bài toán, có đến 5 bài có hai ý a), b) và điểm số sẽ hết sức phụ thuộc vào sự phân bố điểm ở các câu này. Dù vậy, qua khảo sát sơ bộ các đội dự thi, chúng tôi tạm đưa ra dự đoán bộ điểm chuẩn rất chắc của năm nay như sau: Khuyến khích 15 điểm (1, 2, 5), giải 3: 20 điểm (1, 2, 3, 5), giải nhì 25 điểm: (1, 2, 3, 5) + (4a + 6a + 7a), giải nhất 30 điểm: phải giải quyết được các vấn đề xương xẩu hơn như 4b, 6b, 7b hoặc làm những bài trên rất chuẩn.

5. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1 (5.0 điểm). Cho a là một số thực và xét dãy số (u_n) xác định bởi

$$u_1 = a, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (1)$$

- a) Khi $a = 5$, chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
- b) Tìm tất cả các giá trị của số a để dãy số (u_n) xác định và có giới hạn hữu hạn.

Lời giải. Ta sẽ giải trực tiếp ý b), từ đó suy ra kết quả cho ý a). Có thể thấy dãy (u_n) xác định khi và chỉ khi u_2 xác định. Mà $u_2 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{5}{2}a + \frac{1}{4}}$ nên u_2 xác định khi và chỉ khi

$$a \geq -\frac{1}{10}.$$

Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) hội tụ về 3 với mọi $a \geq -\frac{1}{10}$. Để thấy $u_n \geq \frac{1}{2}$, $\forall n \geq 2$. Chú ý rằng $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$ là hàm giảm ngặt trên $\mathbb{R}^+$ nên với mọi n nguyên dương, ta có

$$\frac{2n+3}{n+1} > \frac{2(n+1)+3}{(n+1)+1}.$$

Nếu tồn tại một số $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_{n_0} \geq u_{n_0+1}$ thì ta có

$$u_{n_0+2} = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2(n_0+1)+3}{(n_0+1)+1}u_{n_0+1} + \frac{1}{4}} \leq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n_0+3}{n_0+1}u_{n_0} + \frac{1}{4}} = u_{n_0+1}.$$

Chứng minh tương tự, ta có $u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq u_{n_0+2} \geq u_{n_0+3} \geq \dots$. Điều này có nghĩa là dãy (u_n) không tăng kể từ n_0 trở đi. Đồng thời, dãy cũng bị chặn dưới với mọi $n \geq 2$ nên tồn tại giới hạn $\lim u_n = L$ ($L \geq \frac{1}{2}$). Bây giờ, chuyển phương trình (1) sang giới hạn, ta được

$$L = \frac{1}{2} + \sqrt{2L + \frac{1}{4}}.$$

Giải phương trình này, ta được $L = 3$. Tóm lại, nếu tồn tại số n_0 như trên thì $\lim u_n = 3$.

Tiếp theo, ta sẽ xét trường hợp số n_0 như trên không tồn tại, nói cách khác (u_n) là dãy tăng ngặt. Ta sẽ chứng minh (u_n) bị chặn trên. Thật vậy, do $u_{n+1} > u_n$ và $\frac{2n+3}{n+1} < 3$ với mọi $n \geq 2$ nên ta có đánh giá

$$\frac{1}{2} + \sqrt{3u_n + \frac{1}{4}} > \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} = u_{n+1} > u_n, \quad \forall n \geq 2.$$

Giải bất phương trình ẩn u_n , ta được $u_n < \frac{4+\sqrt{17}}{2}$ với mọi $n \geq 2$. Vậy dãy (u_n) tăng ngặt và bị chặn trên bởi $\frac{4+\sqrt{17}}{2}$ nên có giới hạn hữu hạn. Đến đây, bằng cách chuyển phương trình (1) sang giới hạn, ta cũng thu được $\lim u_n = 3$.

Tóm lại, với mọi $a \geq -\frac{1}{10}$ thì dãy (u_n) xác định và hội tụ về 3. □

Bình luận. Đây là bài toán khảo sát sự hội tụ của dãy số truy hồi dạng $u_{n+1} = f(n, x_n)$, trong đó các hệ số của f phụ thuộc vào n . Mặc dù có khó hơn trường hợp hệ số hằng đôi chút, nhưng đây vẫn là kiểu bài quen thuộc với đa số các bạn học sinh chuyên Toán. Ý tưởng chính cho các dạng này là tìm cách đánh giá vào tính đơn điệu của dãy (như trong lời giải trên) hoặc dùng đánh giá kẹp. Kiểu bài này cũng đã xuất hiện nhiều ở các kỳ VMO trước, gần đây nhất là năm 2012 và 2015. Đặc biệt, bài toán năm 2015 có cách giải rất tương tự với lời giải mà chúng tôi đã trình bày ở trên.

Ngoài cách giải trên, chúng ta cũng có thể đánh giá:

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 3| &= \left| \sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2} \right| = \left| \frac{\frac{2n+3}{n+1}(u_n - 3) + \frac{3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} \right| \\ &\leq \frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} |u_n - 3| + \frac{\frac{3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Chú ý rằng với mọi $n \geq 2$ thì $u_n > 0$ và $\frac{2n+3}{n+1} < \frac{5}{2}$, ta có

$$\frac{\frac{2n+3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} < \frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{5}{6}$$

và

$$\frac{\frac{3}{n+1}}{\sqrt{\frac{2n+3}{n+1}u_n + \frac{1}{4}} + \frac{5}{2}} < \frac{\frac{3}{n+1}}{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Do đó, kết hợp với đánh giá ở trên, ta thu được

$$|u_{n+1} - 3| \leq \frac{5}{6}|u_n - 3| + \frac{1}{n+1}, \quad \forall n \geq 2.$$

Đến đây, bằng cách sử dụng bổ đề quen thuộc (có thể chứng minh bằng định nghĩa giới hạn) sau: *Cho số thực $q \in (0, 1)$. Xét hai dãy không âm (a_n) , (b_n) thỏa mãn $a_{n+1} \leq qa_n + b_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim b_n = 0$. Khi đó, ta có $\lim a_n = 0$.*

Ta dễ dàng suy ra $\lim u_n = 3$ và hoàn tất lời giải cho bài toán.

Dưới đây, xin nêu lại đề của hai bài toán năm 2012 và 2015 để bạn đọc có thể thử sức và áp dụng phương pháp của hai cách giải nêu trên:

1. (VMO, 2012) Cho dãy số thực (x_n) được xác định bởi

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_n = \frac{n+2}{3n}(x_{n-1} + 2), \quad \forall n \geq 2 \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn khi $n \rightarrow +\infty$ và hãy tính giới hạn đó.

2. (VMO, 2015) Cho a là số thực không âm và (u_n) là dãy số xác định bởi

$$u_1 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{n^2}{4n^2 + a} \sqrt{u_n^2 + 3}, \quad \forall n \geq 1.$$

- a) Với $a = 0$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.
 b) Với mọi $a \in [0, 1]$, chứng minh rằng dãy số có giới hạn hữu hạn.

Bài 2 (5.0 điểm). Tồn tại hay không đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên thỏa mãn

$$P\left(1 + \sqrt[3]{2}\right) = 1 + \sqrt[3]{2} \quad \text{và} \quad P\left(1 + \sqrt{5}\right) = 1 + 3\sqrt{5}?$$

Lời giải. Giả sử đa thức $P(x)$ nói trên tồn tại. Đặt $Q(x) = P(1+x) - 1$ thì $Q(x)$ cũng là đa thức với hệ số nguyên. Từ giả thiết, ta có $Q\left(\sqrt[3]{2}\right) = \sqrt[3]{2}$ và $Q\left(\sqrt{5}\right) = 3\sqrt{5}$.

Như vậy, đa thức $Q(x) - x$ có một nghiệm vô tỉ là $\sqrt[3]{2}$. Do $x^3 - 2$ là đa thức bậc nhỏ nhất có hệ số nguyên nhận $\sqrt[3]{2}$ làm nghiệm nên $Q(x) - x$ phải là bội của đa thức này. Nói cách khác, tồn tại đa thức $R(x)$ có các hệ số đều nguyên sao cho

$$Q(x) - x = (x^3 - 2)R(x).$$

Do $R(x)$ có các hệ số đều nguyên nên $R\left(\sqrt{5}\right)$ có dạng $a + b\sqrt{5}$ với $a, b \in \mathbb{Z}$. Thay $x = \sqrt{5}$ vào đẳng thức trên, ta được

$$2\sqrt{5} = \left(5\sqrt{5} - 2\right)\left(a + b\sqrt{5}\right) = 25b - 2a + (5a - 2b)\sqrt{5},$$

suy ra $5a - 2b = 2$ và $2a = 25b$. Tuy nhiên, không có cặp số nguyên nào thỏa mãn đồng thời hai tính chất này. Mâu thuẫn nhận được chứng tỏ đa thức $P(x)$ thỏa mãn đồng thời các tính chất ở đề bài không tồn tại. $\square$

Bình luận. Đây là bài toán rất đặc trưng về đa thức tối thiểu của số đại số. Lời giải trình bày ở trên dựa vào định lý cơ bản và quan trọng sau: *Nếu $P(x)$ và $Q(x)$ là các đa thức đơn khởi, hệ số nguyên có chung nghiệm α và $Q(x)$ là bất khả quy thì $P(x)$ chia hết cho $Q(x)$.*

Kiểu bài này đã từng xuất hiện khá nhiều lần trong các kỳ thi Olympic:

1. (VMO, 1984) Tìm đa thức bậc nhỏ nhất với các hệ số nguyên nhận $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$ làm nghiệm.
2. (VMO, 1997) Đặt $k = \sqrt[3]{3}$.
 - a) Tìm đa thức $P(x)$ bậc nhỏ nhất với các hệ số hữu tỉ thỏa mãn $P(k^2 + k) = k + 3$.
 - b) Tồn tại không đa thức $Q(x)$ có các hệ số nguyên thỏa mãn $Q(k^2 + k) = k + 3$?
3. (International Zhautykov Olympiad, 2014) Tồn tại không đa thức $P(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $P\left(1 + \sqrt{3}\right) = 2 + \sqrt{3}$ và $P\left(3 + \sqrt{5}\right) = 3 + \sqrt{5}$?

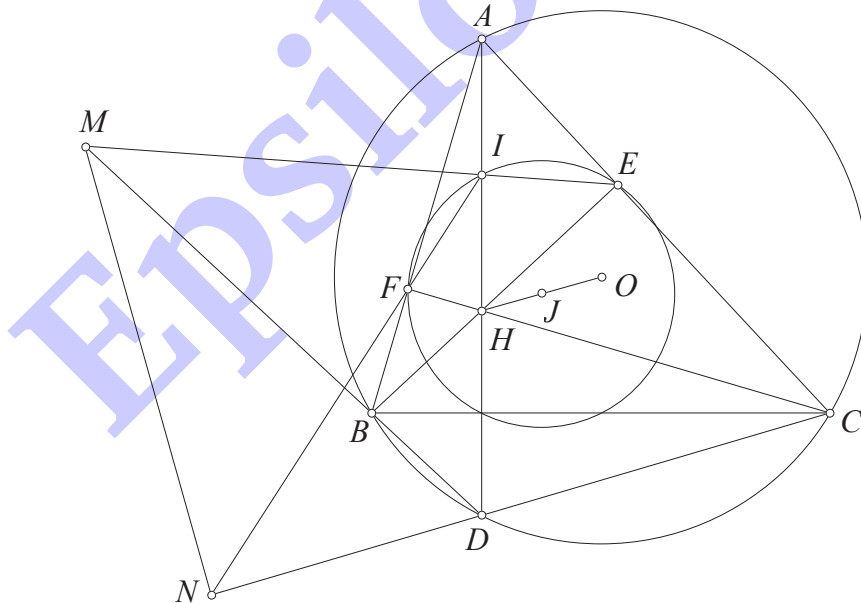
Bài 3 (5.0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và E, F lần lượt là chân các đường cao hạ từ các đỉnh B, C ; AH cắt (O) tại D (D khác A).

- a) Gọi I là trung điểm của AH ; EI cắt BD tại M và FI cắt CD tại N . Chứng minh rằng $MN \perp OH$.
- b) Các đường thẳng DE, DF cắt (O) lần lượt tại P, Q (P và Q khác D). Đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) và AO lần lượt tại R và S (R và S khác A). Chứng minh rằng BP, CQ và RS đồng quy.

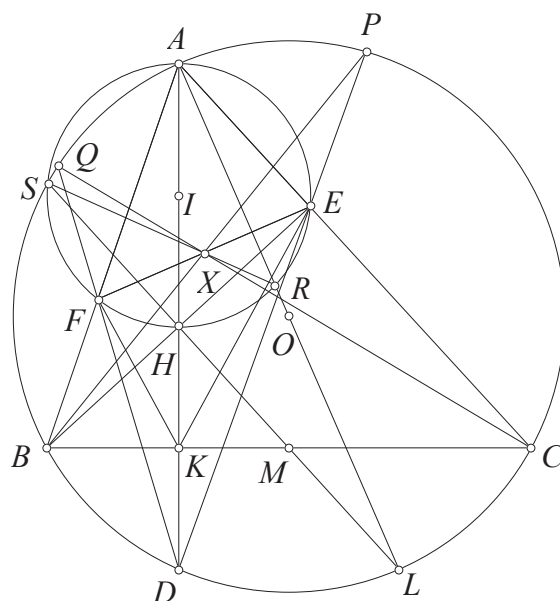
Lời giải. a) Gọi J là đường tròn Euler của tam giác ABC thì (J) đi qua E, I, F đồng thời J là trung điểm OH . Dễ thấy D đối xứng H qua BC nên tam giác BDH cân tại B . Cũng dễ thấy tam giác IEH cân tại I nên $\angle IEH = \angle IHE = \angle BHD = \angle BDH$, suy ra tứ giác $BDEI$ nội tiếp. Mà DB cắt EI tại M nên

$$\overline{ME} \cdot \overline{MI} = \overline{MB} \cdot \overline{MD}.$$

Từ đó phương tích của M đối với đường tròn (J) và (O) bằng nhau. Tương tự phương tích của N đối với đường tròn (J) và (O) bằng nhau. Vậy MN là trục đẳng phương của (O) và (J) nên $MN \perp OJ$. Do J là trung điểm OH nên $MN \perp OH$.



b) Gọi X là trung điểm EF . AH cắt BC tại K . Dễ thấy các tam giác BFE và KHE đồng dạng (g-g). X là trung điểm EF và K là trung điểm HD nên hai tam giác BFX và DHE đồng dạng (c-g-c), suy ra $\angle FBX = \angle HDE = \angle FBP$. Từ đó suy ra ba điểm B, X, P thẳng hàng. Tương tự ba điểm C, X, Q cũng thẳng hàng.



Gọi AL là đường kính của (O) thì dễ thấy SH đi qua L và tứ giác $HBLC$ là hình bình hành nên HL đi qua trung điểm M của BC . Để thấy hai tam giác SEC và SFB đồng dạng (g-g) nên hai tam giác SEF và SCB đồng dạng (c-g-c), hai tam giác này có trung tuyến tương ứng là SX và SM nên $\angle FSX = \angle BSM$. Cũng có hai tam giác SFB và SRL đồng dạng (g-g) nên hai tam giác SFR và SBL đồng dạng (c-g-c). Suy ra

$$\angle FSR = \angle BSL = \angle BSM = \angle FSX.$$

Từ đó, ta có ba điểm S, X, R thẳng hàng. Vậy SR đi qua X . Điều này chứng tỏ ba đường thẳng BP, CQ và RS đồng quy tại trung điểm X của EF . $\square$

Bình luận. Bài toán này được xếp vào mức trung bình khó. Ý a) là một bài toán chứng minh vuông góc bằng trục đẳng phương quen thuộc. Ý tưởng này giúp ta có cách dựng nhanh trục đẳng phương của đường tròn Euler và đường tròn ngoại tiếp tam giác. Ý b) không liên quan tới ý a) và có thể tách thành hai phần riêng biệt là chứng minh BP, CQ đi qua trung điểm EF và chứng minh SR đi qua trung điểm EF .

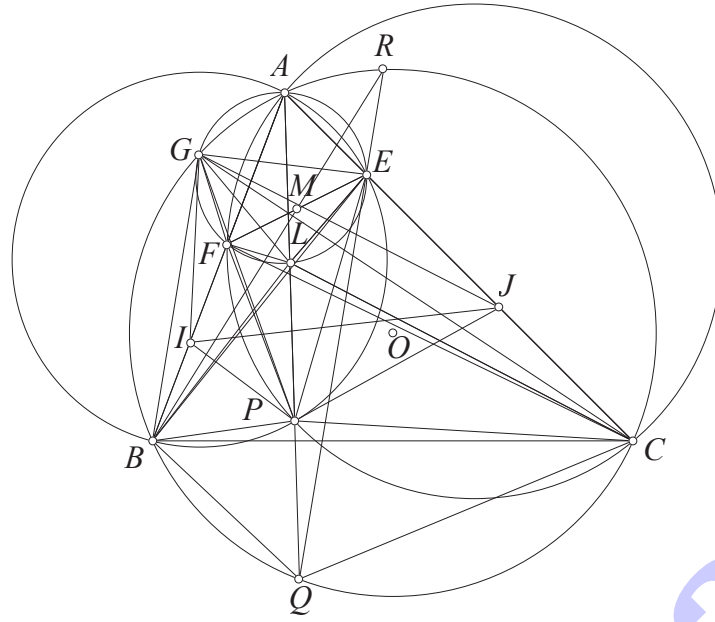
Ý chứng minh BP, CQ đi qua trung điểm EF là một bài toán đã có trên diễn đàn AoPS đã khá lâu và được tác giả Trần Quang Hùng phát triển trong một bài báo trên báo Epsilon 3¹. Gần đây bạn Nguyễn Lê Phước đã đưa ra một mở rộng hơn nữa là bài toán dưới đây.

Bài 1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) và P là điểm bất kỳ trong tam giác. Đường tròn ngoại tiếp tam giác PAB, PCA cắt CA, AB lần lượt tại E, F khác B, C . AP cắt (O) tại Q khác A . QF cắt (O) tại R khác Q . Chứng minh rằng BR chia đôi EF .

Lời giải 1. (Sử dụng phép đồng dạng) Gọi đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt (O) tại G khác A và cắt AQ tại L khác A . Gọi I, J là trung điểm của BF, CE . Phép đồng dạng tâm G biến EC thành FB nên J biến thành I , do đó

$$\angle IGJ = \angle FGE = \angle BAC.$$

¹Tham khảo tại: <http://analgeomatrica.blogspot.com/2015/06/ve-mot-bai-toan-hinh-hoc-tu-dien-aops.html>



Mặt khác phép đồng dạng tâm P biến đoạn CE thành FB nên J cũng biến thành I , do đó $\angle JPI = \angle EPB = 180^\circ - \angle BAC$, từ đó tứ giác $GIPJ$ nội tiếp. Ta có biến đổi góc

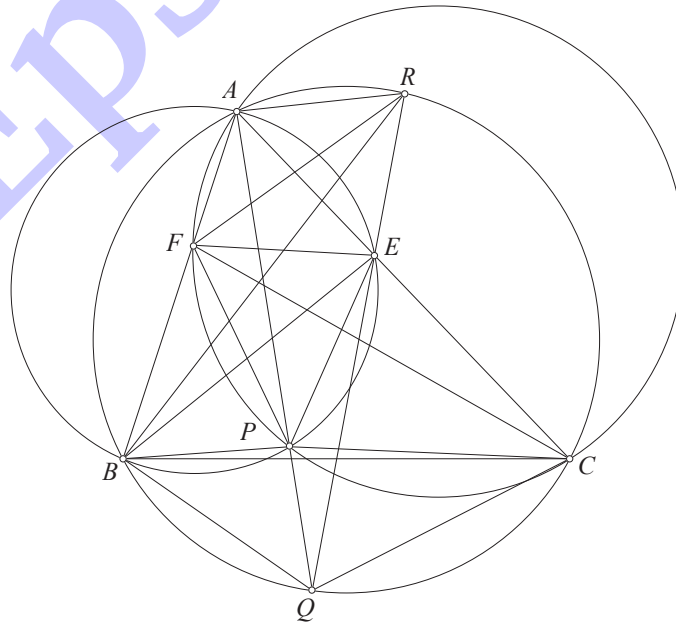
$$\angle IGP = \angle IJP = \angle BEP = \angle BAP = \angle BGQ$$

và

$$\angle GPI = \angle GJI = \angle GCB = \angle GQB.$$

Từ đó hai tam giác GIP và GBQ đồng dạng. Như vậy phép đồng dạng tâm G biến I thành P và đoạn FB thành đoạn LQ . Mặt khác, I là trung điểm FB nên P là trung điểm LQ . Từ đó, gọi M là trung điểm EF . Ta dễ thấy hai tam giác BFE và PLE đồng dạng. Từ đó, hai tam giác BFM và QLE đồng dạng. Vậy $\angle FBM = \angle LQE = \angle FBR$ nên BR đi qua M . Ta có điều phải chứng minh. $\square$

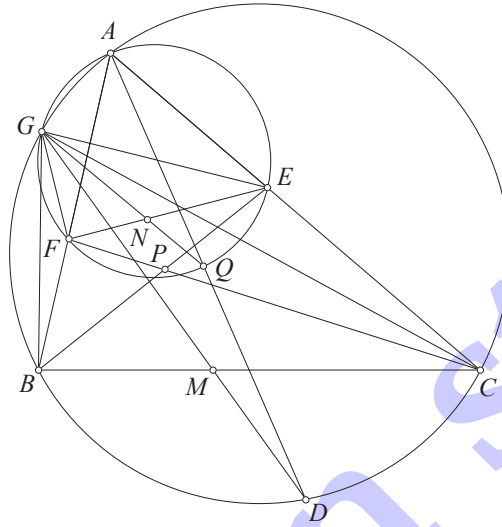
Lời giải 2. (Sử dụng phương pháp diện tích) Dễ thấy các tam giác QBC , PFC đồng dạng và PBF , PEC đồng dạng (g-g). Từ đó $\frac{QB}{QC} = \frac{PF}{PC} = \frac{BF}{CE}$.



Bài toán trên cũng có thể được mở rộng hơn nữa như sau

Bài 3. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . P là điểm bất kỳ trong tam giác. PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Đường tròn (AEF) cắt (O) tại G khác A . M là điểm bất kỳ trên cạnh BC . GM cắt (O) tại D khác G . AD cắt (AEF) tại Q khác A . GQ cắt EF tại N . Chứng minh rằng

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NF}{NE}.$$



Lời giải. Để thấy phép đồng dạng tâm G lần lượt biến E, F thành C, B . Lại có hai tam giác GFB và GQD đồng dạng (g-g) nên $\angle FGB = \angle QGD$ suy ra $\angle NGF = \angle MGB$, do đó cũng phép đồng dạng tâm G đó biến N thành M . Vậy

$$\frac{MB}{MC} = \frac{NF}{NE}.$$

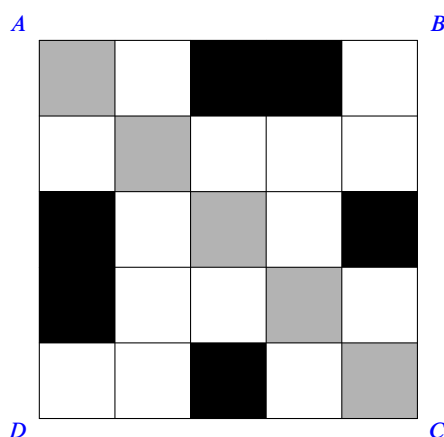
Ta thu được điều phải chứng minh. □

Các bạn có thể làm các bài toán sau đây để luyện tập thêm:

1. (Mở rộng ý a) bài toán 3 VMO 2017) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (K) đi qua B, C cắt CA, AB tại E, F khác B, C . BE cắt CF tại H . AH cắt (O) tại D khác A . Tiếp tuyến tại E, F của (K) lần lượt cắt DB, DC tại M, N . Chứng minh rằng $MN \perp OH$.
2. (Mở rộng ý b) bài toán 3 VMO 2017) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . P là điểm bất kỳ trong tam giác sao cho R đối xứng P qua BC thì R nằm trên (O) . PB, PC lần lượt cắt CA, AB tại E, F . Đường tròn (AEF) cắt (O) tại G khác A . D thuộc (O) sao cho $DR \parallel BC$. AD cắt (AEF) tại Q khác A . DE, DF cắt (O) tại S, T khác D . Chứng minh rằng BS, CT, GQ đồng quy.

Bài 4 (5.0 điểm). Cho số nguyên $n > 1$. Bảng ô vuông $ABCD$ kích thước $n \times n$ gồm n^2 ô vuông đơn vị, mỗi ô vuông đơn vị được tô bởi một trong ba màu: đen, trắng, xám. Một cách tô màu được gọi là *đối xứng* nếu mỗi ô có tâm trên đường chéo AC được tô màu xám và mỗi cặp ô đối xứng qua AC được tô cùng màu đen hoặc cùng màu trắng. Người ta điền vào mỗi ô xám số 0, mỗi ô trắng một số nguyên dương và mỗi ô đen một số nguyên âm. Một cách điền số như vậy được gọi là k – *cân đối* (với k nguyên dương) nếu thỏa mãn điều kiện sau

- i) Mỗi cặp ô đối xứng qua AC được điền cùng một số nguyên thuộc đoạn $[-k, k]$.
 - ii) Nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô đen thì tập các số nguyên dương được điền trên hàng đó và tập các số nguyên dương được điền trên cột đó không giao nhau; nếu một hàng và một cột giao nhau tại ô trắng thì tập các số nguyên âm được điền trên hàng đó và tập các số nguyên âm được điền trên cột đó không giao nhau.
- a) Với $n = 5$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để tồn tại cách điền số k – cân đối cho cách tô màu đối xứng ở hình bên dưới.



- b) Với $n = 2017$, tìm giá trị nhỏ nhất của k để với mọi cách tô màu đối xứng, luôn tồn tại cách điền số k – cân đối.

Lời giải. a) Gọi A_i lần lượt là tập hợp các số nguyên dương trên hàng i với $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Theo như hình của đề bài, ta cần có $A_1 \cap A_3 = \emptyset$ vì hàng 1, cột 3 giao nhau tại ô đen và cột 3 thì giống như hàng 3. Tương tự, $A_1 \cap A_4 = \emptyset$, $A_3 \cap A_5 = \emptyset$.

Ngoài ra, hàng 1, cột 5 có chung ô trắng ở góc nên hàng 1, hàng 5 thỏa mãn $A_1 \cap A_5 \neq \emptyset$. Tương tự thì $A_3 \cap A_4 \neq \emptyset$, $A_4 \cap A_5 \neq \emptyset$.

Trước hết, $k = 1$ không đủ vì không thể điền cùng số 1 để cho $A_1 \cap A_3 = \emptyset$. Giả sử với $k = 2$ điền được, khi đó $|A_1| = 1$ vì nếu $|A_1| = 2$ thì không còn số để chọn cho A_3 . Giả sử $A_1 = \{1\}$ thì $A_3 = A_4 = \{2\}$, $A_5 = \{1\}$. Nhưng chú ý rằng $A_4 \cap A_5 \neq \emptyset$ nên mâu thuẫn. Suy ra $k \geq 3$.

Ta sẽ chứng minh $k = 3$ thỏa với cách điền như sau:

0	1	-1	-2	1
1	0	2	2	3
-1	2	0	2	-3
-2	2	2	0	3
1	3	-3	3	0

b) Điều kiện cần: Trước hết, xét cách tô màu đối xứng như bàn cờ, tức là trắng đen xen kẽ như hình, trong đó vị trí (i, j) sẽ được tô đen nếu $i + j$ chẵn, ngược lại thì tô trắng.

Xét hai ô trắng bất kỳ trong bảng ô vuông trên ở vị trí (a, b) và (c, d) , $1 \leq a, b, c, d \leq 2017$.

- Nếu $a + c$ chẵn thì $b + d$ cũng chẵn, suy ra $a + d$ và $b + c$ lẻ. Khi đó, một trong hai ô (a, d) và (b, c) sẽ được tô đen vì chúng không thể cùng nằm trên đường chéo màu xám. Suy ra hai ô vuông trắng phải được điền số khác nhau.
- Nếu $a + c$ lẻ thì $b + d$ cũng lẻ, xét ô (d, c) điền cùng số với ô (c, d) thì rõ ràng ta có thể áp dụng lập luận trên để suy ra hai số điền cho hai ô khác nhau.

Từ đó suy ra tất cả các số điền cho các ô trắng nằm ở nửa trên bên phải của bảng là đôi một phân biệt. Do đó, ta thu được kết quả

$$k \geq 2 + 4 + 6 + \cdots + 2016 = 1008 \cdot 1009 = \frac{2017^2 - 1}{4}.$$

Điều kiện đủ: Ta sẽ chứng minh rằng $k = \frac{2017^2 - 1}{4}$ thỏa mãn bài toán bằng quy nạp rằng kết quả trên cũng đúng với mọi bảng có kích thước $n \times n$ với n là số nguyên dương, cụ thể là $k = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Thật vậy, với $n = 1, n = 2, n = 3$, ta dễ dàng kiểm tra được các kết quả tương ứng.

Xét $n \geq 4$ và giả sử khẳng định đúng với mọi số nguyên dương bé hơn n .

Đánh số các hàng từ $1 \rightarrow n$ và cột $1 \rightarrow n$. Ta sẽ chứng minh rằng với mọi vị trí của các ô đen thì luôn tồn tại cách điền các số nguyên dương không vượt quá k_n vào ô trắng còn lại trong bảng (trường hợp điền số âm thì tương tự vì tính bình đẳng).

Xét graph $G = (V, E)$ mà V là tập hợp các đỉnh, đỉnh thứ i ứng với hàng i và $1 \leq i \leq n$; còn E là tập hợp các cạnh, trong đó có cạnh nối từ đỉnh thứ i đến đỉnh thứ j nếu như tại ô (i, j) và ô (j, i) là ô màu trắng. Ta phát biểu bổ đề sau:

Bổ đề (Định lý Mantel-Turan). Xét một graph đơn vô hướng có n đỉnh và k cạnh. Khi đó, nếu graph này không có chứa tam giác thì $k \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Áp dụng vào bài toán, ta xét các trường hợp sau:

- Nếu graph G không có chứa tam giác, theo bổ đề thì nó sẽ có không quá $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ cạnh, nghĩa là có không quá $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ô trắng nên có thể dùng $k = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ số nguyên dương điền vào các ô đó (cho dù vị trí của các ô đen thế nào đi nữa).
- Nếu graph G có chứa tam giác, giả sử các đỉnh a, b, c phân biệt được nối với nhau đôi một. Điều này tương ứng với việc các ô $(a, b), (b, c), (c, a)$ và $(b, a), (c, b), (a, c)$ là giao điểm của các hàng a, b, c đều được tô màu trắng. Khi đó, các số điền vào các ô đó không cần phải phân biệt và tập hợp các ô trắng (nếu có) còn lại trên các hàng a, b, c cũng không cần phải rời nhau. Rõ ràng trên mỗi hàng sẽ còn lại không quá $n - 3$ ô như thế.

Khi đó, ta có thể dùng 1 số để điền vào các ô trắng ở trên và dùng không quá $n - 3$ số phân biệt để điền vào mỗi ô còn lại của mỗi hàng.

Nếu không tính 3 hàng a, b, c , ta còn lại $n - 3$ hàng, sử dụng giả thiết quy nạp thì cần không quá $\left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor$ số nguyên dương phân biệt cho các hàng đó.

Do đó, trong trường hợp này, số lượng số nguyên dương phân biệt cần dùng không vượt quá

$$1 + n - 3 + \left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-3)^2 + 4(n-2)}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta đều cần sử dụng không quá $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ số nguyên dương phân biệt để điền vào các ô trắng hay nói cách khác $k = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ cũng thỏa mãn đề bài với bảng $n \times n$.

Theo nguyên lý quy nạp thì khẳng định được chứng minh. Vậy giá trị tốt nhất cần tìm của k là $\frac{2017^2-1}{4}$. Bài toán được giải quyết hoàn toàn. $\square$

Bình luận. Lời giải được trình bày ở trên, chúng tôi có tham khảo ý tưởng của bạn Nguyễn Huy Tùng, thành viên đội tuyển IMO 2014 và bạn Nguyễn Hoàng Tùng Lâm, học sinh trường THPT Chuyên Hà Nội-Amsterdam, cũng là một trong các thí sinh dự thi VMO 2017.

Bài toán này thuộc dạng cực trị tổ hợp và đòi hỏi phải xử lý cả điều kiện cần và đủ thì mới có thể kết luận được đáp số của bài toán.

Ở phần a), ta thấy kích thước của bảng là nhỏ nên có thể thử trực tiếp các số để kiểm tra và việc xây dựng cũng khá nhẹ nhàng. Chú ý rằng một số có thể được sử dụng lại nhiều lần theo như đề bài nếu đọc không cẩn thận, ta dễ hiểu nhầm đáp số câu a) là $k = 5$.

Phần b) thử thách hơn nhiều với kích thước bảng lớn, và quan trọng hơn là cách tô đối xứng tùy ý nên chưa thể định hướng được ngay giá trị “vừa đủ lớn” của k .

Ý tưởng mấu chốt là chỉ ra một mô hình đặc biệt mà ở đó, đòi hỏi giá trị k phải đạt được cực đại thì mới đủ để điền vào. Và bàn cờ ở trên chính là mô hình cần phải tìm, số các ô đen trắng đan xen đòi hỏi tất cả các số dương điền vào các ô trắng phải phân biệt nhau, các số âm cũng thế.

Đoạn khó khăn chính là việc xây dựng cách đánh số cân đối cho mọi mô hình. Thực tế là hầu như các cách xây dựng trực tiếp thuật toán để điền vào với $k = \frac{2017^2-1}{4}$ đều không thành công do các mô hình có thể biến đổi rất phức tạp. Cách tiếp cận dùng đồ thị ở trên cũng chỉ mới chứng minh được là cách đánh số cân đối sẽ luôn tồn tại chứ chưa chỉ ra cách xây dựng cụ thể. Tuy nhiên, về mặt lập luận thì như thế là đủ.

Điểm mới lạ của bài toán này chính là việc sử dụng ngôn ngữ đồ thị để giải quyết vấn đề, một cách tiếp cận mà trước giờ khá ít khi xuất hiện trong các kỳ thi HSG cấp Quốc gia. Định lý Mantel-Turan về tồn tại graph con đầy đủ trong một graph đơn vô hướng là tương đối quen thuộc đối với các học sinh có học qua về lý thuyết graph. Đặc điểm của các bài toán dùng Mantel-Turan là thường che giấu được vấn đề khá kỹ và khó xử lý tốt bằng các cách thông thường.

Định lý này có cách chứng minh dùng quy nạp là phân hoạch tập hợp đỉnh thành A, B rồi:

- Đếm số cạnh trong A , đếm số cạnh trong B .
- Đếm số cạnh nối giữa A, B .

Đó cũng là ý tưởng cho lời giải đã nêu ở trên. Dưới đây là một số bài toán tương tự đã xuất hiện trong các kỳ thi Olympic:

1. (MOSP, 2011) Xét các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$. Chứng minh rằng có không quá $\frac{n^2}{4}$ cặp (i, j) với $1 \leq i < j \leq n$ sao cho $1 < |x_i - x_j| < 2$.
2. (China TST, 1987) Trong mặt phẳng cho $2n$ điểm với $n \geq 2$ và có tất cả $n^2 + 1$ đoạn thẳng nối chúng. Chứng minh rằng
 - a) Tồn tại ít nhất một tam giác.
 - b) Tồn tại hai tam giác có chung cạnh.
 - c) Tồn tại ít nhất n tam giác.
3. (Romania TST, 2008) Cho số nguyên dương $n > 1$. Xét một nhóm người thỏa mãn đồng thời các đặc điểm sau:
 - i) Trong ba người bất kỳ, luôn tồn tại hai người quen biết nhau.
 - ii) Trong n người bất kỳ, luôn tồn tại hai người không quen biết nhau.

Chứng minh rằng số lượng người không quá $\frac{(n-1)(n+2)}{2}$.

Bài 5 (6.0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn hệ thức

$$f(xf(y) - f(x)) = 2f(x) + xy \quad (1)$$

với mọi số thực x, y .

Lời giải. Thay $x = 1$ vào (1), ta được

$$f(f(y) - f(1)) = y + 2f(1), \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Từ đây có thể thấy hàm f là một song ánh. Do đó, tồn tại duy nhất số thực a để $f(a) = 0$. Thay $x = a$ vào phương trình (1), ta được

$$f(af(y)) = ay, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Trong (3), cho $y = 0$, ta được $f(af(0)) = 0 = f(a)$. Từ đó, do f đơn ánh nên ta có $af(0) = a$. Suy ra $a = 0$ hoặc $f(0) = 1$.

Xét trường hợp $a = 0$, tức $f(0) = 0$. Thay $y = 0$ vào (1), ta được $f(-f(x)) = 2f(x)$. Do f toàn ánh nên ta có $f(x) = -2x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, khi thử lại, hàm này không thỏa mãn phương trình (1). Do đó $a \neq 0$, suy ra $f(0) = 1$.

Thay $x = 0$ vào (1), ta được $f(-1) = 2$. Thay $y = a$ vào (3), ta được $a^2 = f(0) = 1$, suy ra $a = 1$ (do $f(-1) = 2$), tức $f(1) = 0$. Đến đây, ta có hai cách tiếp cận như sau:

Cách 1. Do $f(1) = 1$ nên phương trình (2) có thể viết lại dưới dạng

$$f(f(y)) = y, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2')$$

Thay y bởi $f(y)$ vào (1) và sử dụng (2'), ta được

$$f(xy - f(x)) = 2f(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Trong phương trình này, ta xét $x \neq 0$ và thay $y = \frac{f(x)}{x}$, ta được

$$1 = 2f(x) + xf\left(\frac{f(x)}{x}\right),$$

suy ra

$$f\left(\frac{f(x)}{x}\right) = \frac{1 - 2f(x)}{x}, \quad \forall x \neq 0.$$

Thay $y = \frac{f(x)}{x}$ vào (1) và sử dụng kết quả trên, ta được

$$f(1 - 3f(x)) = 3f(x), \quad \forall x \neq 0.$$

Do f song ánh và $f(0) = 1$ nên với $x \neq 0$ thì $1 - 3f(x)$ có thể nhận mọi giá trị thực khác -2 . Do đó, từ kết quả trên, ta suy ra được $f(x) = -x + 1$ với mọi $x \neq -2$.

Nói riêng, ta có $f(3) = -2$. Thay $y = 3$ vào (2'), ta được $f(-2) = 3$. Tóm lại, ta có $f(x) = -x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Thử lại, ta thấy hàm này thỏa mãn các yêu cầu bài toán.

Cách 2. Thay $y = 1$ vào (1), ta được

$$f(-f(x)) = 2f(x) + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4)$$

Lần lượt thay $x = -1$ và $x = -2$ vào đẳng thức trên, ta được $f(-2) = 3$ và $f(-3) = 4$. Chú ý rằng $f(1) = 0$ nên ta cũng có đẳng thức (2') như cách 1 ở trên, do đó bằng cách thay x bởi $f(x)$ vào (4), ta được

$$f(-x) = f(x) + 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đây suy ra $f(2) = -1$ và $f(3) = -2$. Bây giờ, ta sẽ chứng minh $x = -1$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(t) = -2t$. Thật vậy, giả sử có số $b \neq -1$ sao cho $f(b) = -2b$, ta thay $x = b$ và $y = 3$ vào (1) thì được $1 = f(0) = -4b + 3b$, suy ra $b = -1$, mâu thuẫn.

Với kết quả trên, ta thay $y = 2$ thì có

$$f(-x - f(x)) = 2(x + f(x)) = -2(-x - f(x)), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Từ đó suy ra $-x - f(x) = -1$, tức $f(x) = -x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Bình luận. Đây là một bài toán khá hay với độ khó ở mức trung bình. Bài này thuộc nhóm phương trình hàm với biến tự do và ý tưởng chính vẫn xoay quanh việc vận dụng tính chất ánh xạ của hàm số (đơn ánh, toàn ánh, song ánh) để giải. Điểm thú vị ở đây là thay vì đi vào mô-typ đưa về hàm cộng tính (kiểu bài thường gặp) thì bài này tận dụng triệt để tính song ánh của hàm cũng như các phép thế thì mới có thể giải quyết thành công bài toán.

Như chúng tôi đã nói trong phần bình luận chung bài này rất giống với đề Olympic của Brazil năm 2006: [Tìm tất cả các hàm số \$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\$ thỏa mãn điều kiện](#)

$$f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Cách giải của hai bài toán cũng hoàn toàn tương tự nhau. Đây là một sự trùng hợp thú vị. Dưới đây là một số bài toán “tương tự” khác:

1. (IMO Shortlist, 2002) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + y) = 2x + f(f(y) - x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. (Kiểm tra Trường Đông Nam Bộ, 2016) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(f(x) + 2y) = 10x + f(f(y) - 3x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. (Baltic Way, 2010) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. (EGMO, 2012) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(yf(x + y) + f(x)) = 4x + 2yf(x + y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

5. (EGMO, 2012) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xf(x + y)) = f(yf(x)) + x^2, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Ngoài hai cách giới thiệu ở trên, ta cũng có một hướng đi khác “thủ công” hơn một chút nhưng cũng khá tự nhiên. Xin giới thiệu cùng bạn đọc lời giải của anh Phạm Kim Hùng (thành viên đội tuyển IMO của Việt Nam năm 2004 và 2005) như sau:

Đầu tiên, ta cũng thực hiện các bước làm tương tự như các lời giải trên để chứng minh $f(0) = 1$, $f(-1) = 2$, $f(1) = 0$ và $f(f(x)) = x$. Tiếp theo, lần lượt thay y bởi $f(y)$ và x bởi $f(x)$ vào phương trình (1), ta thu được các kết quả sau:

$$f(xy - f(x)) = 2f(x) + xf(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (5)$$

và

$$f(f(x)f(y) - x) = 2x + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Thay $x = -1$ vào (5) và (6), ta được

$$f(-y - 2) = 4 - f(y) \Rightarrow f(y - 2) + f(-y) = 4, \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad (7)$$

và

$$f(2f(y) + 1) = -2 + 2y \Rightarrow f(2y - 2) = 2f(y) + 1, \quad \forall y \in \mathbb{R}. \quad (8)$$

Thay $y = 0$ vào (6), ta được

$$f(f(x) - x) = 2x \Rightarrow f(x) - x = f(2x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Thay $y = 1$ vào phương trình (1), ta được

$$f(-f(x)) = 2f(x) + x \Rightarrow f(-x) = 2x + f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (10)$$

Kết hợp (7) và (10), ta được

$$4 - f(x - 2) = 2x + f(x) \Rightarrow f(x) + f(x - 2) = 4 - 2x, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (11)$$

Kết hợp (8) và (9), ta được

$$f(2x) = f(x) - x = 2f(x + 1) + 1 \Rightarrow 2f(x) + x = f(x - 1), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay kết quả này vào (11), ta được

$$4 - 2x = f(x) + 2f(x - 1) + x - 1 = f(x) + 2[2f(x) + x] + x - 1 = 5f(x) + 3x - 1.$$

Từ đó suy ra $f(x) = -x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải trên tương đối cồng kềnh nhưng cũng mang đậm tính phương pháp. Ý tưởng mấu chốt của lời giải chính là thiết lập mối quan hệ giữa $f(x)$, $f(x - 1)$, $f(x - 2)$ để từ đó đi đến lời giải. Ta tạm gọi những đẳng thức thể hiện các mối liên hệ này là những đẳng thức “kiểu truy hồi” (vì giống dãy dạng truy hồi). Phương pháp sử dụng những đẳng thức kiểu truy hồi là một trong những phương pháp rất đẹp và thông dụng trong giải phương trình hàm. Ta có thể bắt gặp khá nhiều bài toán dạng này trong thi Olympic Toán:

1. Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy) = f(x)f(y) - f(x + y) + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. (India, 2003) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(xy) + f(x) + f(y) = f(x)f(y) + f(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

3. (IMO Shortlist, 2005) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

4. (Bulgaria, 2005) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}^*$ thỏa mãn

$$f(x^2 + y) = f^2(x) + \frac{f(xy)}{f(x)}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*, x^2 + y \neq 0.$$

5. (IMO Shortlist, 2012) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(-1) \neq 0$ và

$$f(1+xy) - f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

6. (IMO, 2015) Tìm tất cả các hàm số $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x + f(x+y)) + f(xy) = x + f(x+y) + yf(x), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Một điều thú vị khác là, bản thân đẳng thức (5) cũng có thể coi như một phương trình hàm độc lập và cũng có thể giải được. Thậm chí đây là một bài toán đẹp với ba nghiệm hàm là $f(x) = 0$, $-2x$ và $1 - x$. Bạn đọc có thể thử sức với bài toán này.

Bài 6 (7.0 điểm). Chứng minh rằng

a) $\sum_{k=1}^{1008} k C_{2017}^k \equiv 0 \pmod{2017^2}.$

b) $\sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}.$

Lời giải. a) Ta có biến đổi

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{1008} k C_{2017}^k &\equiv \sum_{k=1}^{1008} \frac{k \cdot 2017!}{k!(2017-k)!} \equiv 2017 \cdot \sum_{k=1}^{1008} \frac{2016!}{(k-1)!(2017-k)!} \\ &\equiv 2017 \cdot \sum_{k=0}^{1007} \frac{2016!}{k!(2016-k)!} \equiv 2017 \cdot \sum_{k=0}^{1007} C_{2016}^k \\ &\equiv 2017 \cdot \sum_{k=0}^{1007} C_{2016}^k \equiv \frac{2017}{2} \cdot \left(\sum_{k=0}^{2016} C_{2016}^k - C_{2016}^{1008} \right) \\ &\equiv \frac{2017}{2} \cdot (2^{2016} - C_{2016}^{1008}) \pmod{2017^2}. \end{aligned}$$

Ngoài ra, vì 2017 là số nguyên tố nên theo định lý Fermat nhỏ thì $2^{2016} \equiv 1 \pmod{2017}$. Hơn nữa, ta cũng có

$$\begin{aligned} C_{2016}^{1008} - 1 &= \frac{1009 \cdot 1010 \cdots 2016 - 1008!}{1008!} \\ &= \frac{(2017-1)(2017-2) \cdots (2017-1008) - 1008!}{1008!}. \end{aligned}$$

Để thấy tử số chia hết cho 2017 và 1008! nguyên tố cùng nhau với 2017 nên

$$C_{2016}^{1008} \equiv 1 \equiv 2^{2016} \pmod{2017}.$$

Do đó, tổng đã cho chia hết cho 2017^2 .

b) Quy ước ký hiệu $\frac{a}{b} \equiv \frac{c}{d} \pmod{m}$ với $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, $bd \neq 0$ và $m \in \mathbb{Z}^+$, $m > 1$ nếu dạng rút gọn của phân số $\frac{ad-bc}{bd}$ có tử chia hết cho m .

Trước hết, ta có nhận xét rằng với p nguyên tố bất kỳ thì

$$C_p^k \equiv (-1)^{k-1} \frac{p}{k} \pmod{p^2}.$$

Thật vậy, ta có

$$C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!} = \frac{p}{k} \cdot \frac{(p-k+1)(p-k+2) \cdots (p-1)}{(k-1)!}$$

nên suy ra

$$C_p^k - (-1)^{k-1} \frac{p}{k} = \frac{p}{k} \left[\frac{(p-k+1)(p-k+2) \cdots (p-1) - (-1)^{k-1}(k-1)!}{(k-1)!} \right].$$

Để thấy tổng trong ngoặc vuông chia hết cho p^2 nên nhận xét được chứng minh.

Từ đó, ta cũng có $\frac{1}{p} C_p^k \equiv \frac{(-1)^{k-1}}{k} \pmod{p}$. Suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{504} (-1)^k C_{2017}^k &\equiv \sum_{k=1}^{504} (-1)^k (-1)^{k-1} \frac{2017}{k} \equiv \sum_{k=1}^{504} (-1)^{2k-1} \frac{2017}{k} \\ &\equiv -2017 \sum_{k=1}^{504} \frac{1}{k} \pmod{2017^2}. \end{aligned}$$

Ta đưa về chứng minh

$$-2017 \sum_{k=1}^{504} \frac{1}{k} \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}$$

hay

$$-\sum_{k=1}^{504} \frac{1}{k} \equiv \frac{3(2^{2016} - 1)}{2017} \pmod{2017}.$$

Đặt $S_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$ thì rõ ràng $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \dots - \frac{1}{2n} = S_{2n} - S_n$. Do đó

$$S_{504} = S_{1008} - \sum_{k=1}^{1008} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_{2016} - \sum_{k=1}^{2016} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{1008} \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$$

Để ý rằng $S_{2016} = \sum_{k=1}^{1008} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{2017-k} \right) \equiv 0 \pmod{2017}$ nên ta đưa về chứng minh

$$\sum_{k=1}^{2016} \frac{(-1)^{k-1}}{k} + \sum_{k=1}^{1008} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \equiv \frac{3(2^{2016} - 1)}{2017} \pmod{2017}.$$

Sử dụng lại nhận xét ở trên, ta đưa về

$$\frac{1}{2017} \left(\sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k + \sum_{k=1}^{1008} C_{2017}^k \right) \equiv \frac{3(2^{2016} - 1)}{2017} \pmod{2017}.$$

Tuy nhiên, đây lại là đẳng thức vì

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k + \sum_{k=1}^{1008} C_{2017}^k &\equiv \sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2016} C_{2017}^k \equiv \frac{3}{2} \left(\sum_{k=0}^{2017} C_{2017}^k - 2 \right) \\ &\equiv \frac{3(2^{2017} - 2)}{2} \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017}. \end{aligned}$$

Ta có điều phải chứng minh. □

Bình luận. Lời giải trên, chúng tôi có tham khảo ý tưởng của bạn Phạm Ngô Thành Đạt, sinh viên trường Đại học KHTN, ĐHQG TPHCM.

Bài 6a có thể giải quyết nhẹ nhàng nhờ việc rút gọn biểu thức và dùng định lý Fermat nhỏ. Tuy nhiên, ở bài 6b, ta cần có cách khai thác và biến đổi đúng hướng mới có thể xử lý gọn gàng được. Thật vậy, có khá nhiều hướng để tiếp cận bài 6b, chẳng hạn:

- Với cách đặt như trên, ta cũng có thể đưa về chứng minh đồng dư thức

$$3S_{1008} \equiv 2S_{504} \pmod{2017}.$$

Tuy nhiên, do không thể ghép cặp trực tiếp nên khó chứng minh một cách trực tiếp được.

- Nếu ta dùng công thức về tam giác Pascal, có thể rút gọn tổng ở vế trái thành $C_{2016}^{504} - 1$ và đưa về chứng minh kết quả $C_{2016}^{504} - 1 \equiv 3(2^{2016} - 1) \pmod{2017^2}$ hay

$$\frac{C_{2016}^{504} + 2}{3} \equiv 2^{2016} \pmod{2017^2}.$$

Nếu như thay 2017 bởi số p nhỏ hơn thì có thể dùng công thức Legendre để tìm $v_p(C_{2016}^{504})$, nhưng ở đây số 2017 quá lớn nên vẫn khó phát triển tiếp được.

Kết quả của bài toán này có được nhờ 2017 là số nguyên tố, hơn nữa, ở câu b, ta còn cần có 2017 chia 4 dư 1. Với lời giải như trên, rõ ràng bài toán cũng đúng với mọi số nguyên tố $p = 4k + 1$.

Nhận xét $C_p^k \equiv (-1)^{k-1} \frac{p}{k} \pmod{p^2}$ sử dụng ở trên còn là ý tưởng để giải quyết bài toán:

1. (N7, IMO Shortlist, 2003) Cho p là số nguyên tố lẻ. Đặt

$$S_a = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2} + \cdots + \frac{a^{p-1}}{p-1}, \quad a \in \mathbb{Z}^+.$$

Đặt $S_3 + S_4 - 3S_2 = \frac{m}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}^+$. Chứng minh rằng $p \mid m$.

Có thể nói rằng bài 6b là một kết quả đẹp và để chứng minh nó, ta còn phải biến đổi khó và mẹo hơn cả bài N7 trong IMO Shortlist ở trên.

Tuy nhiên, việc chuyển đổi giữa hệ số nhị thức và phân số trong đồng dư thức liên quan đến số nguyên tố đã xuất hiện trong các bài cũ hơn như:

2. (IMO, 1979) Chứng minh rằng $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{1}{1319} \equiv 0 \pmod{1979}$.

3. (Putnam, 1980) Cho p là số nguyên tố, chứng minh rằng

$$\sum_{i=0}^p C_p^i C_{p+i}^i \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

4. (Putnam, 1996) Cho $p \geq 5$ là số nguyên tố và đặt $k = \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor$ thì

$$\sum_{i=1}^k C_p^i \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Nói thêm về các bài toán liên quan đến đồng dư thức của phân số, ta còn có định lý Wolstenholme:

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}$$

và

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}.$$

Trên cơ sở này, ta còn có thể giải quyết các bài toán sau:

5. (APMO, 2006) Cho $p > 3$ là số nguyên tố và r là số cách đặt p quân cờ lên bàn cờ hình vuông có kích thước $p \times p$ sao cho không có hai quân cờ nào cùng hàng (nhưng có thể cùng cột). Chứng minh rằng $p^5 \mid r$.

6. (KHTN, 2010) Cho dãy số (u_n) xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = 0, \\ u_{n+1} = \frac{(4n+2)n^3}{(n+1)^4} u_n + \frac{3n+1}{(n+1)^4}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

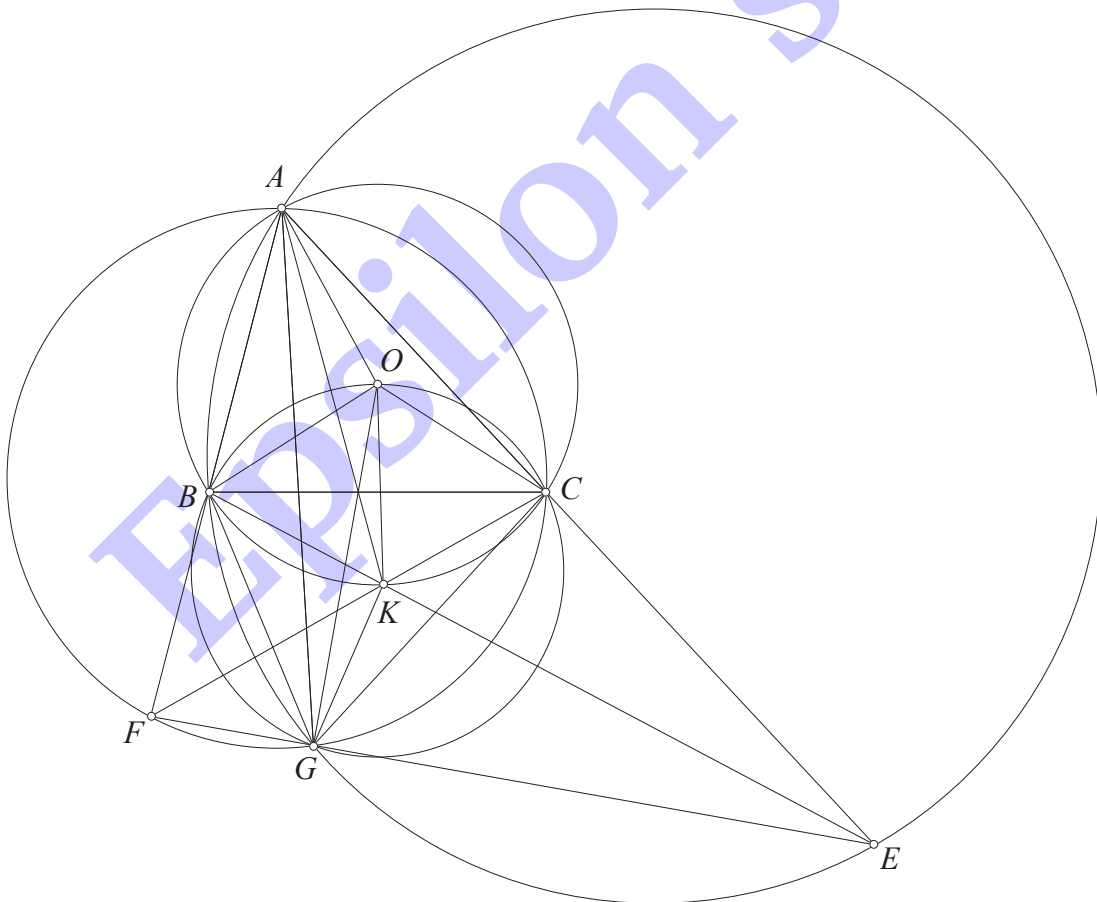
Chứng minh rằng dãy số này chứa vô số số hạng nguyên dương.

7. (Chọn đội tuyển Nghệ An, 2012) Cho $p > 3$ là số nguyên tố và đặt $M = \{1, 2, \dots, p\}$. Với mỗi số nguyên dương k thỏa $1 \leq k \leq p$, xét tập hợp $E_k = \{A \subset M : |A| = k\}$ và đại lượng $x_k = \sum_{A \in E_k} (\min A + \max A)$. Chứng minh rằng

$$\sum_{k=1}^{p-1} x_k C_p^k \equiv 0 \pmod{p^3}.$$

Bài 7 (7.0 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) và G là một điểm thuộc cung $\widehat{BC}$ không chứa O của đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác OBC . Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABG cắt AC tại E , đường tròn ngoại tiếp tam giác ACG cắt AB tại F (E và F khác A).

- a) Gọi K là giao điểm của BE và CF . Chứng minh rằng AK , BC và OG đồng quy.
- b) Cho D là một điểm thuộc cung $\widehat{BOC}$ chứa O của đường tròn (I) ; GB cắt CD tại M , GC cắt BD tại N . Giả sử MN cắt (O) tại hai điểm P , Q . Chứng minh rằng khi G thay đổi trên cung $\widehat{BC}$ không chứa O của đường tròn (I) , đường tròn ngoại tiếp tam giác GPQ luôn đi qua một điểm cố định.



Lời giải. a) Ta có

$$\begin{aligned} \angle EGF &= \angle BGE + \angle CGF - \angle EGF \\ &= 360^\circ - 2\angle BAC - (180^\circ - 2\angle BAC) = 180^\circ \end{aligned}$$

Dưới đây là một số mở rộng:

1. (Mở rộng ý a) bài toán 7 VMO 2017) Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (K) đi qua B, C . Trung trực BC cắt (K) tại M, N . P là điểm thuộc (K) . PM cắt CA, AB tại E, F . BE cắt CF tại L . Chứng minh rằng ba đường thẳng AL, PN và BC đồng quy.
2. (Mở rộng ý b) bài toán 7 VMO 2017) Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O) . P di chuyển trên đường tròn ngoại tiếp tam giác. S, T là hai điểm cố định trên (O) . PS, PT lần lượt cắt CA, AB tại E, F . EF cắt một đường tròn (K) cố định qua B, C tại Q, R . Chứng minh rằng đường tròn (PQR) luôn đi qua hai điểm cố định khi điểm P di động trên đường tròn (O) .