ĐẠI HỌC QUỐC GIA THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

KHOA TOÁN – TIN HỌC

Học phần: Mô hình giải tích Toán học trong Sinh học

Mã học phần: TTH374

CHƯƠNG 6

SÓNG LƯU ĐỘNG

GIẢNG VIÊN HƯỚNG DẪN: TS. Võ Hoàng Hưng

SINH VIÊN THỰC HIỆN: Nguyễn Đặng Minh Huy – 1311124
Võ Hoàng Trọng – 1311372
Võ Anh Kiệt – 1411133

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NGÀY 29 THÁNG 12 NĂM 2016

Mục lục

Chương 6

Sóng lưu động

6.1 Nghiên cứu phương trình sóng lưu động

Phương trình Fisher sau khi viết gọn các tham số sẽ có dạng:

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial^2 z} + \beta(1-\beta) \tag{6.1}$$

Trong đó β là hàm số theo hai biến z, t và β, z, t không phụ thuộc tham số.

Rõ ràng nghiệm của phương trình phụ thuộc vào điều kiện đầu và điều kiện biên. Chúng ta đặt những điều kiện đó theo thời gian như sau:

$$\beta(z,t) \to \beta_{\pm\infty} \text{ khi } z \to \pm\infty \text{ và } \beta(z, t=0) = \beta_0(z) \tag{6.2}$$

Trong đó $\beta_{\pm\infty}, \beta_0$ là những hằng số.

6.1.1 Một số điểm chính

6.1.1.1 Xây dựng phương trình sóng lưu động

Phương trình 6.1 có thể có rất nhiều nghiệm, tuy nhiên trong phần này ta sẽ tìm nghiệm có dạng sóng lưu động (đơn giản có thể hiểu là hàm không thay đổi về hình dạng và chuyển động với vận tốc v sẽ được xác định sau). Ý nghĩa của nghiệm sóng lưu động sẽ được giải bày rõ hơn ở mục 6.1.1.3.

Xét phép biến đổi $y = z - vt$ và hàm số $B : R \to R$ thỏa $B(y) = \beta(z,t)$. Sử dụng quy tắc đạo hàm hàm hợp ta được:

$$\frac{\partial\beta}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial B}{\partial y} \text{ và } \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\beta}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2}.\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial\beta}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t} = -v\frac{\partial B}{\partial y} \quad (6.4)$$

Thay vào (6.1) ta được

$$B'' + vB' + B(1-B) = 0 \quad (6.5)$$

với B là hàm số theo biến y và $' = \frac{d}{dy}$ và $B(y) \to B(\pm\infty), y \to \pm\infty$ là các hằng số.

6.1.1.2 Điều kiện biên

Ta chỉ tìm $B(y) \in [0,1], \forall y \in R$

- Ta cần điều kiện biên thỏa $B(+\infty), B(-\infty), B'(+\infty), B'(-\infty)$ là các số hữu hạn. Khi đó $B(+\infty), B(-\infty)$ hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Thật vậy, giả sử $B(+\infty) \in (0;1)$ hay $\lim\limits_{y\to\infty} B(y) = a \in (0;1)$ với $\varepsilon = \min\left\{\frac{a}{2}; \frac{1-a}{2}\right\} > 0$, tồn tại $y_0 > 0$ sao cho $|B(y) - a| < \varepsilon, \forall y \geq y_0$.

$$\Rightarrow a - \varepsilon < B(y) < a + \varepsilon, \ \forall y \geq y_0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} B(y) > a - \varepsilon > a - \frac{a}{2} > \frac{a}{2} > 0 \\ 1 - B(y) > 1 - a - \varepsilon = 1 - a - \frac{1-a}{2} = \frac{1-a}{2} > 0 \end{cases}, \forall y \geq y_0$$
$$\Rightarrow B(y).(1-B(y)) > \frac{a(1-a)}{2}, \forall y \geq y_0$$
$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} B(y).(1-B(y))dy \geq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a(1-a)}{2} = \infty$$

  Mặc khác ta có $B''(y) + vB'(y) + B(y)(1-B(y)) = 0$, lấy tích phân 2 vế ta được

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [B'' + vB' + B(1-B)]dy = 0 \quad (6.6)$$

$$[B'(y) + vB(y)]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} B(y)(1-B(y))dy = 0 \quad (6.7)$$

  Do $B'(+\infty), B'(-\infty), B(+\infty), B(-\infty)$ là các số hữu hạn và kết hợp với (6.6) ta được vế trái (6.7) vô hạn đưa đến điều vô lý.

  Vậy $a = 0$ hoặc $a = 1$. Tương tự cho trường hợp $B(-\infty)$.

- Không mất tính tổng quát và dựa trên những quy luật được tiên đoán trên thực tế ta có thể giả sử $(B(-\infty), B(+\infty)) = (1, 0)$. Khi đó ta phải có $v \geq 0$, khi đó sẽ có $v \geq 0$.

- Bây giờ ta sẽ chứng minh điều kiện biên cuối cùng là $B'(\pm\infty) = 0$.

  – Trước hết ta chứng minh $B(+\infty) = 0$.
  Ta có $\lim\limits_{y \to +\infty} B(y) = 0$ nên với $\varepsilon_n = \frac{1}{n} > 0, n > 2$ thì tồn tại $\delta_n > 0$ sao cho:

  $$|B(y)| < \varepsilon_n, \forall y > \delta_n$$

  hay

  $$0 < B(y) < \frac{1}{n}$$

  do $B(y) \in [0; 1]$.
  Xét hàm số $g(t) = t - t^2, t \in (0; \frac{1}{n})$

  $$g'(t) = 1 - 2t, g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} > \frac{1}{n}, \forall n > 2$$

  Kẻ bảng biến thiên

t	0		$\frac{1}{n}$
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$

  Qua bảng biến thiên ta thấy

  $$0 < g(t) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$$

  hay

  $$0 < B(y)(1 - B(y)) < \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}, \forall y > \delta_n$$

  lại có

  $$B''(y) + vB'(y) = -B(y)(1 - B(y))$$

  nên

  $$\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} < B''(y) + vB'(y) < 0, \forall y > \delta_n$$

  Xét

  $$u(y) = e^{vy} B'(y), y \in (\delta_n; +\infty)$$

  khi đó

  $$u'(y) = e^{vy}(B''(y) + vB'(y)) < 0, \forall y > \delta_n$$

nên u là hàm số giảm trên $(\delta_n; +\infty)$.
Suy ra

$$\begin{aligned} &u(y) < u(\delta_n), \forall y > \delta_n \\ \Rightarrow &e^{vy} B'(y) < e^{v\delta_n} B'(\delta_n) \\ \Rightarrow &B'(y) < e^{v\delta_n} B'(\delta_n).e^{-vy} \end{aligned}$$

Cho $y \to +\infty$ ta được

$$B'(+\infty) \leq 0 \tag{6.8}$$

Xét

$$h(y) = e^{vy}\left(B'(y) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{v}\right), y \in (\delta_n; +\infty)$$

khi đó

$$h'(y) = e^{vy}\left(B''(y) + vB'(y) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right) > 0, \forall y > \delta_n$$

nên u là hàm số tăng trên $(\delta_n; +\infty)$.
Suy ra

$$\begin{aligned} &h(y) > h(\delta_n), \ \ \forall y > \delta_n \\ \Rightarrow &e^{vy} B'(y) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right).\frac{1}{v} > h(\delta_n) \end{aligned}$$

Cố định n, cho $y \to +\infty$ ta được

$$B'(+\infty) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)\frac{1}{v} \geq 0, \forall n > 2$$

Cho $n \to +\infty$ ta được

$$B'(+\infty) \geq 0 \tag{6.9}$$

Từ (6.8) và (6.9) ta được $B'(+\infty) = 0$.

– Trường hợp $B'(-\infty)$

Đặt $\widetilde{B}(w) = B(-w) = \beta(z,t); w = z - \widetilde{v}\,t$, ở đây ta phải hiểu $(\widetilde{B}; \widetilde{v})$ là một cặp nghiệm của (6.5), khi đó

$$\begin{aligned} \widetilde{B}'(y) &= -B(-y) \\ \widetilde{B}''(y) &= B''(-y) \end{aligned}$$

ta sẽ chứng minh $\widetilde{B}'(+\infty) = 0$ để suy ra $B'(-\infty) = 0$.
Thiết lập tương tự như phần 6.1.1.1, ta được

$$\widetilde{B}''(y) + \widetilde{v}\,\widetilde{B}'(y) + \widetilde{B}(y)(1 - \widetilde{B}(y)) = 0$$

Lúc này ta có

$$\widetilde{B}(+\infty) = B(-\infty) = 1$$
$$\widetilde{B}(-\infty) = B(+\infty) = 0$$

khi đó $\widetilde{v} > 0$. Như vậy

$$\widetilde{B}''(y) + \widetilde{v}\,\widetilde{B}'(y) + \widetilde{B}(y)(1 - \widetilde{B}(y)) = 0$$

với $\widetilde{v} > 0$.

Áp dụng trường hợp trên, ta được

$$\widetilde{B}'(+\infty) = 0$$
$$\Rightarrow B'(-\infty) = 0$$

6.1.1.3 Tính duy nhất nghiệm

Nghiệm hệ (6.1) và (6.2) là duy nhất. Chứng minh được xem như một bài tập của môn phương trình đạo hàm riêng. Tuy nhiên nghiệm của phương trình sóng lưu động không phải là duy nhất bởi lẽ với phương trình (6.5) có nghiệm với mỗi giá trị v khác nhau. Hơn nữa, khi cố đinh v, nếu $B(y)$ là một nghiệm của (6.5) thì $B(y + A)$ với A là hằng số bất kì cũng là nghiệm của (6.5).

Thật vậy, đặt $G(w) = B(y + A), w = y + A$ ta được

$$G'(w) = B'(y + A), \;\; G''(w) = B''(y + A) \tag{6.10}$$

Thay y bởi $y + A$ vào (6.5) và kết hợp với (6.10) ta được

$$G''(w) + vG'(w) + u(w)(1 - u(w)) = 0$$

Nếu cả v và A đều cho trước thì nghiệm của phương trình sóng lưu động (6.5) thường là duy nhất.

6.1.1.4 Điều kiện đầu

Nếu giữ điều kiện đầu ở (6.2), thì với $B(y)$ chỉ có thể là nghiệm của (6.5) tại mọi thời điểm t nếu $B(y) = \beta_o(y)$. Tuy nhiên thường thì ta chỉ muốn tìm nghiệm của phương trình đạo hàm riêng đầy đủ (6.1) và (6.2) tiến về nghiệm của phương trình sóng lưu động khi $t \to \infty$, với v và A cho trước, ta chọn lớp hàm điều kiện đầu rất rộng.

Nhà toán học người Nga Kolmogorov đã chứng minh được rằng nghiệm của phương trình (6.1) và (6.2) thật sự tiến về nghiệm song lưu động khi $t \to \infty$, với v cho trước, trong lớp hàm điều kiện đầu rất rộng.

6.1.2 Sự tồn tại nghiệm và mặt phẳng pha

Ta sẽ kiểm tra sự tồn tại nghiệm của phương trình Fisher (6.5) với điều kiện biên $(B(\infty), B(-\infty)) = (1, 0)$ và $v > 0$ dựa trên ý nghĩa của các bài tập mở rộng liên quan mặt phẳng pha (B', B).

Xét phương trình sóng lưu động:

$$B''(y) + vB'(y) + B(y)(1 - B(y)) = 0 \tag{6.11}$$

trong đó $(B(\infty), B(-\infty)) = (1, 0)$ và $v > 0$.

Đặt

$$\begin{cases} \gamma & = B' = f(B, \gamma) \\ -v\gamma - B(1 - B) & = \gamma' = g(B, \gamma) \end{cases}$$

Bài tập 1. Chứng tỏ rằng điểm cân bằng (stationary point) $(\beta', \beta) = (1, 0)$ luôn là điểm yên ngựa (saddle point) và điểm cân bằng $(\beta', \beta) = (0, 0)$ là điểm ổn định (stable node) khi $v \geq 2$ và là điểm ổn định theo hình xoắn ốc (stable spiral) khi $v < 2$.

Giải. Bằng cách viết $\beta' = \gamma$ ta được

$$\frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial y}\begin{pmatrix} \beta \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ -v\gamma - \beta(1 - \beta) \end{pmatrix}$$

Ma trận Jacobi được cho bởi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \beta} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g}{\partial \beta} & \frac{\partial g}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 + 2\beta & -v \end{pmatrix}$$

Tại điểm $(0, 0)$ ta có

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -v - \lambda \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + v\lambda + 1 = 0$$

Suy ra

$$\lambda = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 - 4}}{2}$$

Do đó, nếu $v < 2$ thì λ là nghiệm phức có dạng $\lambda = -v/2 \pm i\mu$ nên $(\beta', \beta) = (0, 0)$ là điểm ổn định theo hình xoắn ốc.

Nếu $v \geq 2$ thì

$$-v + \sqrt{v^2 - 4} < -v + \sqrt{v^2} = -v + v = 0$$

nên

$$-v - \sqrt{v^2 - 4} < -v + \sqrt{v^2 - 4} < 0$$

dẫn đến $(\beta', \beta) = (0, 0)$ là điểm ổn định.

Tại điểm $(1, 0)$ ta có

$$|J - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -v - \lambda \end{vmatrix}$$
$$\Rightarrow \lambda^2 + v\lambda - 1 = 0$$

Suy ra

$$\lambda = \frac{-v \pm \sqrt{v^2 + 4}}{2}$$

Dễ thấy

$$-v + \sqrt{v^2 + 4} > -v + \sqrt{v^2} = -v + v = 0$$

nên

$$-v - \sqrt{v^2 + 4} < 0 < -v + \sqrt{v^2 + 4}$$

Do đó $(\beta', \beta) = (1, 0)$ là điểm yên ngựa.

Bài tập 2. Hãy giải thích tại sao nghiệm của phương trình sóng lưu động Fisher phải tiến về điểm ổn định khi $y \to \pm\infty$ và nghiệm của (6.4) với $v < 2$ không thực tế?

Giải. Theo 6.1.1.2, ta có

$$\begin{aligned} B(\infty) &= 0 \\ B'(\infty) &= 0 \\ B(-\infty) &= 1 \\ B'(-\infty) &= 0 \end{aligned}$$

do đó

$$\begin{aligned} (B, \gamma) &\xrightarrow{y \to \infty} (0, 0) \\ (B, \gamma) &\xrightarrow{y \to -\infty} (1, 0) \end{aligned}$$

Nếu $v < 2$ thì $(0, 0)$ là điểm ổn định theo hình xoắn ốc, do đó vết (B, γ) tiến về $(0; 0)$ theo hình xoắn ốc thì $B(y) < 0$ tại một vài điểm trên vết và điều này không thực tế.

Bài tập 3. Hãy chỉ ra rằng gradient của đa tạp không ổn định tại $(B, \gamma) = (0, 1)$ là hai phần đường đi xuất phát từ điểm $(B, \gamma) = (0, 1)$, xác định bởi công thức

$$\frac{1}{2}(\pm v + \sqrt{v^2 + 4})$$

Giải. Ta tìm vector riêng của ma trận Jacobi tại $(1;0)$, tức là

$$
\begin{aligned}
J(1,0).\begin{pmatrix}\Delta B\\ \Delta\gamma\end{pmatrix} &= \pm\lambda\begin{pmatrix}\Delta B\\ \Delta\gamma\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -v\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\Delta B\\ \Delta\gamma\end{pmatrix} &= \pm\lambda\begin{pmatrix}\Delta B\\ \Delta\gamma\end{pmatrix}\\
\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_+\\ \Delta B - v\Delta\gamma = b\lambda_+\end{cases} &\vee \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_-\\ \Delta B - v\Delta\gamma = b\lambda_-\end{cases}\\
\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_+\\ \Delta\gamma = \Delta B.\frac{1}{v+\lambda_+}\end{cases} &\vee \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_-\\ \Delta\gamma = \Delta B.\frac{1}{v+\lambda_-}\end{cases}
\end{aligned}
$$

thay

$$\lambda_\pm = \frac{-v\pm\sqrt{v^2+4}}{2}$$

ta được

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_+\\ \Delta\gamma = \Delta B.\frac{2}{v+\sqrt{v^2-4}}\end{cases} &\vee \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_-\\ \Delta\gamma = \Delta B.\frac{2}{v-\sqrt{v^2-4}}\end{cases}\\
\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_+\\ \Delta\gamma = \Delta B.\frac{v-\sqrt{v^2+4}}{-2}\end{cases} &\vee \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_-\\ \Delta\gamma = \Delta B.\frac{v+\sqrt{v^2+4}}{-2}\end{cases}\\
\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_+\\ \Delta\gamma = \Delta B.\lambda_+\end{cases} &\vee \begin{cases}\Delta\gamma = \Delta B.\lambda_-\\ \Delta\gamma = \Delta B.(\lambda_-)\end{cases}\\
\Leftrightarrow \Delta\gamma &= \Delta B.\lambda_\pm
\end{aligned}
$$

Khi đó ta được

$$\nabla = \left|\frac{\Delta\gamma}{\Delta B}\right| = \left|\frac{v\pm\sqrt{v^2+4}}{2}\right| = \frac{\pm v+\sqrt{v^2+4}}{2}$$

Bài tập 4. Hãy giải thích tại sao bất kì quỹ đạo (B,γ) hữu hạn phải đi ra từ điểm $(1;0)$ trên đa tạp không ổn định theo hướng giảm B?

Giải. Nhắc lại gần ở những điểm rất gần điểm ổn định, ta có:

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}B\\ \gamma\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta B\\ \Delta\gamma\end{pmatrix}
&= a_- e^{\lambda_- y} v_- + a_+ e^{\lambda_+ y} v_+\\
&= a_- e^{\lambda_- y}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}(-v-\sqrt{v^2+4}\end{pmatrix}\\
&+ a_+ e^{\lambda_+ y}\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}(-v+\sqrt{v^2+4}\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Từ đó ta được:

$$\begin{cases} B(y) - 1 = a_- e^{\lambda_- y} + a_+ e^{\lambda_+ y} \\ \gamma(y) = a_- e^{\lambda_- y}\lambda_- + a_+ e^{\lambda_+ y}\lambda_+ \end{cases}$$

Với $y < 0$ đủ bé thì ta có

$$\begin{cases} B(y) - 1 \approx a_- e^{\lambda_- y} \\ \gamma(y) \approx a_- e^{\lambda_- y}.\lambda_- \end{cases}$$

do $\lambda_+ > 0$. Mặt khác, do $B(y) \in (0;1)$ nên $a_- < 0$, khi đó $B'(y) = \gamma(y) = a_- e^{\lambda_- y}.\lambda_-$ là hàm số giảm, mà $B'(-\infty) = 0$ dẫn đến $B'(y) < 0$, nói cách khác quỹ đạo (B, γ) hữu hạn phải đi ra từ điểm $(1;0)$ trên đa tạp không ổn định theo hướng giảm B.

Bài tập 5. Xét $v \geq 2$, hãy chỉ ra rằng

$$\frac{d\gamma}{dB} < 1$$

khi $\gamma = -B; B \in (0;1]$

Giải. Ta có

$$\frac{d\gamma}{dB} = \frac{-v\gamma - B(1-B)}{B}$$

do đó

$$\left.\frac{d\gamma}{dB}\right|_{\gamma=-B} = -v + (1-B) = (-v+2) - (1+B) < -1$$

Bài tập 6. Chỉ ra rằng khi $v \geq 2$ thì đa tạp không ổn định rời khỏi $(B', B) = (1;0)$ và đi vào miền $B' < 0, B < 1$ sẽ không bao giờ rời khỏi miền.

$$R = \{(B, \gamma) : \gamma \leq 0, B \in [0;1], \gamma \geq -B\}$$

Giải. Trên mặt phẳng (B, γ), R chính là miền hình tam giác tạo bởi 3 cạnh

$$L_1 = \{(B, \gamma) : \gamma = 0, B \in (0,1)\}$$
$$L_2 = \{(B, \gamma) : B = 1, \gamma \in (-1;0)\}$$
$$L_3 = \{(B, \gamma) : \gamma = -B, B \in (0,1]\}$$

Theo bài tập 4 thì quỹ đạo xuất phát từ điểm $(B, B') = (1;0)$ theo hướng giảm B (ta gọi là (C)) sẽ đi vào miền R vì

$$B(y) \approx 1 + a_- e^{\lambda_- y} < 1$$
$$\gamma(y) \approx a_- e^{\lambda_- y}.\lambda_- < 0$$

Ta sẽ chứng minh (C) không thể đi ra khỏi R bằng cách chỉ ra rằng khi nó tiến đến gần hay chạm vào một trong 3 cạnh của R theo hướng ra thì nó sẽ không thể đi tiếp ra ngoài R mà phải đi vào trong R.

- Nếu (C) tiến đến L_1 từ bên trong R, khi đó

$$\frac{d\gamma}{dB} = -v - \frac{B(1-B)}{\gamma} \to -\infty$$

do $\gamma \to 0; B \in (0,1)$.

Lúc đó (C) sẽ quay ngược vào R theo hướng hợp với trục OB một góc -90^0 theo chiều lượng giác.

- Nếu (C) tiến đến L_2 từ bên trong R khi đó

$$\left.\frac{d\gamma}{dB}\right|_{L_2} = -v - \frac{B(1-B)}{\gamma} = -v < 0$$

Lúc đó (C) sẽ tiếp tục đi theo hướng hợp với OB một góc $a \in (90^0; 180^0)$ hoặc $a \in (270^0; 360^0)$ theo chiều lượng giác. Tuy nhiên do lúc này $B' = \gamma < 0$, do đó (C) phải tiếp tục đi theo chiều giảm B nghĩa là theo góc $a \in (90; 180)$, nói cách khác (C) tiếp tục đi trong R.

- Nếu (C) tiến đến L_3 từ bên trong R, khi đó theo bài tập 5 ta có

$$\left.\frac{d\gamma}{dB}\right|_{\gamma=-B} < -1$$

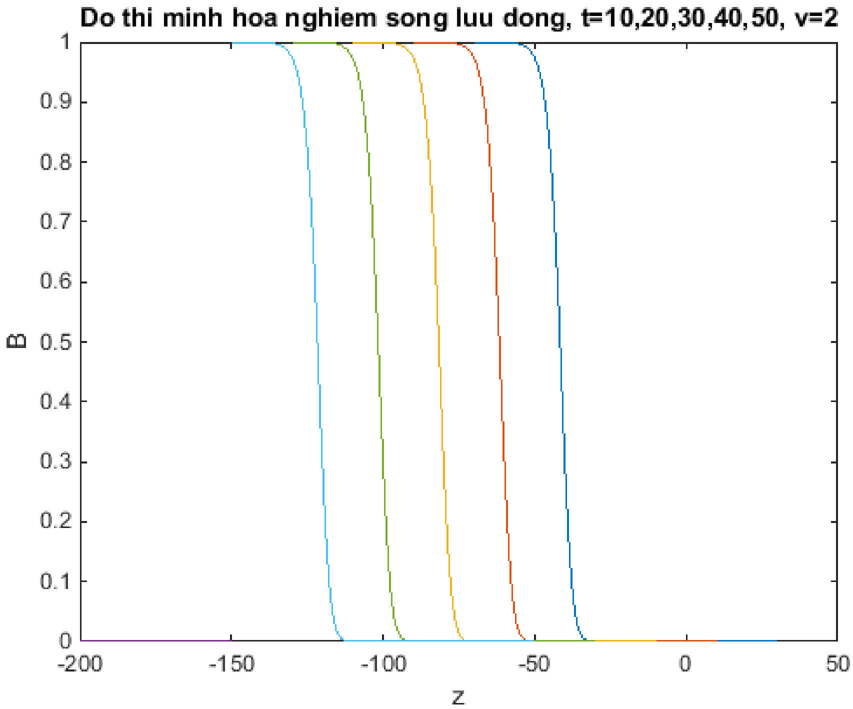
lúc đó (C) sẽ tiếp tục đi theo hướng hợp với OB một góc $a \in (90^0; 135^0)$ hoặc $a \in (270^0; 315^0)$ theo chiều lượng giác. Tuy nhiên do lúc này $B' = \gamma = -B < 0$, do đó (C) phải tiếp tục đi theo chiều giảm B nghĩa là theo góc $a \in (90^0; 135^0)$, nói cách khác (C) tiếp tục đi trong R.

Bài tập 7. Chứng minh rằng tồn tại nghiệm đơn điệu $B \geq 0$ thỏa phương trình (6.1) với mọi giá trị $v \geq 2$.

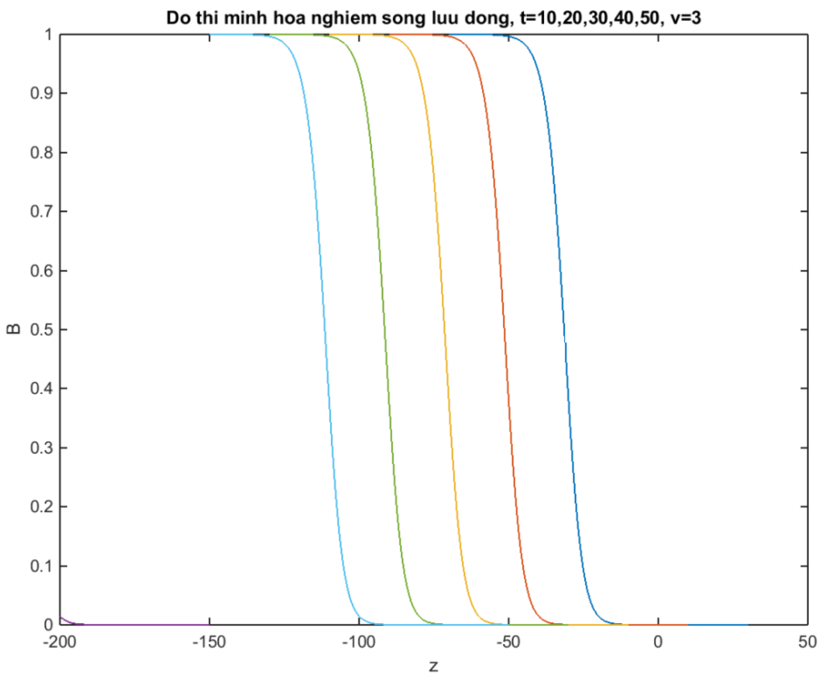
Giải. Để thỏa điều kiện biên của phương trình (6.1) thì nghiệm B phải có đồ thị trên hệ trục tọa độ (B, B') xuất phát từ điểm $(1; 0)$. Theo bài tập 4 thì quỹ đạo (C) của một hàm B nào đó thỏa (6.1). Với $v \geq 2$ cho trước thì chỉ xác định được một hàm như vậy. Quỹ đạo (C) sẽ đi vào miền R như đã lý luận ở bài tập 6, nó sẽ không thể đi ra khỏi R để rồi tiến về $(0; 0)$ khi $y \to \infty$ như đã trình bày ở bài tập 2. Trong quá trình đi trong R luôn có $B' = \gamma < 0$ nên nghiệm B sẽ đơn điệu giảm và duy nhất nếu v cho trước cố định.

6.1.3 Quan hệ giữ tốc độ lan truyền sóng và điều kiện đầu

Chúng ta đã thấy rằng, với v cố định, mặt phẳng biểu diễn nghiệm của phương trình sóng lưu động Fisher là duy nhất. Tính không duy nhất dễ thấy vì $\beta(y)$ là nghiệm của



Hình 6.1: Đồ thị minh họa nghiệm sóng lưu động ứng với $t = 10, 20, 30, 40, 50$ ứng với $v = 2$



Hình 6.2: Đồ thị minh họa nghiệm sóng lưu động ứng với $t = 10, 20, 30, 40, 50$ ứng với $v = 3$

phương trình Fisher thì $\beta(y + A)$ cũng là nghiệm với A là hằng số, về mặt hình học, điều này tương ứng với sự di chuyển của sóng dọc theo mặt phẳng biểu diễn.

Hai hình trên minh họa nghiệm của hệ (6.1) và (6.2) tại các thời điểm $t = 10, 20, 30, 40, 50$ với các vận tốc khác nhau $v = 2$ và $v = 3$.

Với cùng vận tốc, ta nhận xét đồ thị của nghiệm hệ (6.1) và (6.2) có hình dạng không thay đổi theo thời gian giống như một "con sóng" ổn định về biên độ đang chuyển động trong mặt phẳng tọa độ. Đồng thời với khi vận tốc v thay đổi, thì tốc độ chuyển động của sóng cũng thay đổi, cụ thể là tại cùng thời gian $t = 10$, con sóng đại diện cho nghiệm của hệ (6.1) và (6.2) với $v = 3$ chuyển động nhanh hơn con sóng với $v = 2$ (nhanh hơn theo nghĩa di chuyển sang phải nhiều hơn).

Kolmogorov đã xét phương trình sau

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \varphi(1 - \varphi)$$

với điều kiện biên

$$\varphi(z, \tau) \to 1 \text{ khi } z \to -\infty \text{ và } \varphi(z, \tau) \to 0 \text{ khi } z \to \infty$$

và điều kiện đầu thỏa mãn điều sau: Tồn tại K với $0 < K < \infty$ sao cho $\varphi(z, \tau = 0) = 0$ với $z > K$và $\varphi(z, \tau = 0) = 1$ với $z < -K$. Ông đã chứng minh được $\varphi(z, \tau)$ tiến tới

Hình 6.3: Ảnh minh hoạ sự lan truyền đại dịch "Cái Chết Đen" ở châu Âu vào năm 1347 – 1350

nghiệm của phương trình sóng lưu động Fisher với $v = 2$ khi $t \to \infty$. Chúng ta chấp nhận điều này và không chứng minh.

6.2 Mô hình lan truyền

6.2.1 Lịch sử

Vào giữa thế kỷ 14, ở châu Âu xuất hiện đại dịch "Cái Chết Đen" quét qua lục địa này. Những nghiên cứu gần đây cho thấy "Cái Chết Đen" hình thành do loài bọ chét truyền từ chuột sang người, gây nên bệnh dịch hạch. Đại dịch này xuất phát ở Ý vào khoảng tháng 12, năm 1347 từ những chuyến tàu cập bến từ phương Đông. Vài năm sau đó, đại dịch lan rộng khoảng 200 đến 400 dặm mỗi năm, khiến cho một phần ba dân số châu Âu thiệt mạng và 80% những người nhiễm bệnh sẽ chết trong 2 đến 3 ngày tới. Hình 6.3 mô tả mức độ lan truyền theo dạng sóng của bệnh dịch này.

Trong bài này, ta nghiên cứu một mô hình đơn giản của sự lan truyền và cách xấp xỉ trong thực tế với giả định rằng lượng tổng thể sinh vật luôn cố định. Giả sử có một dịch bệnh lan truyền trong một khu vực, bệnh này có thể được cứu chữa, nhưng người mắc bệnh có thể chết, ta không loại bỏ số lượng người chết ra khỏi tổng dân số trong vùng. Ta phân tổng số người trong vùng đó thành 3 lớp:

- Lớp dễ bệnh S: Những người trong lớp này chưa hề mắc bệnh và có nguy cơ nhiễm bệnh.

- Lớp nhiễm bệnh I: Những người trong lớp này đã mắc bệnh và có khả năng truyền bệnh sang người khác.

- Lớp hết bệnh R: Những người trong lớp này đã được trị khỏi bệnh hoặc đã chết vì bệnh.

Đây là mô hình SIR mà ta sẽ nghiên cứu sau đây.

6.2.2 Mô hình SIR

6.2.2.1 Điều kiện nghiên cứu

- Bệnh dịch xảy ra trong khoảng thời gian đủ ngắn để lượng dân số luôn cố định, tính cả người đã chết vì bệnh dịch này vào tổng số dân.

- Chu kỳ ủ bệnh không đáng kể.

- Nếu người nhiễm bệnh đã hết bệnh thì người này không còn khả năng nhiễm bệnh. Do đó, người này sẽ ở lại lớp R.

- Mẫu dân số đủ lớn để có kết quả xấp xỉ đúng.

- Ta xác định mức độ lan truyền dịch bệnh bằng định luật tác dụng khối lượng như sau:

$$\begin{aligned} S + I &\xrightarrow{r} 2I \\ I &\xrightarrow{a} R \end{aligned}$$

Ý nghĩa:

$$S + I \xrightarrow{r} 2I$$

Ở vế trái, người trong lớp S bị người trong lớp I lây bệnh với tốc độ $r > 0$, khiến người đó chuyển sang lớp I, thu được vế phải là $I + I = 2I$.

$$I \xrightarrow{a} R$$

Người trong lớp I sau một thời gian sẽ hết bệnh (hoặc chết vì bệnh này) và chuyển sang lớp R với tốc độ $a > 0$.

6.2.2.2 Mô hình

Ta xem mỗi lớp là một hàm số theo thời gian t gồm $S(t), I(t)$ và $R(t)$ có tính chất:

(i) Lớp nhiễm bệnh có tốc độ tỉ lệ thuận với số lượng người nhiễm bệnh và người dễ bệnh, tức rSI, với $r > 0$ là tham số hằng, đó cũng là tốc độ mất đi số người trong lớp dễ bệnh.

(ii) Tốc độ hết bệnh của người nhiễm bệnh tỉ lệ thuận với số lượng người nhiễm bệnh, tức aI, với $a > 0$ là hằng số, $1/a$ là độ đo thời gian một người ở trong trạng thái nhiễm bệnh.

(iii) Chu kỳ ủ bệnh ngắn, tức người dễ bệnh khi tiếp xúc với mầm bệnh sẽ nhiễm bệnh ngay.

Từ các tính chất trên, ta có được mô hình cổ điển Kermack – McKendrick, do W. O. Kermack và A. G. McKendrick công bố vào năm 1927.

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \tag{6.12}$$
$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI \tag{6.13}$$
$$\frac{dR}{dt} = aI \tag{6.14}$$

với $r > 0$ là tốc độ lây nhiễm và $a > 0$ là tốc độ hết bệnh của người nhiễm bệnh. Ta muốn tìm nghiệm không âm với mỗi S, I và R, tức $S(t), I(t), R(t) \geq 0$ với mọi $t \geq 0$. Do tổng kích thước dân số luôn cố định nên ta cộng các phương trình từ (6.12) đến (6.14) thu được:

$$\frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0 \Rightarrow S(t) + I(t) + R(t) = N \tag{6.15}$$

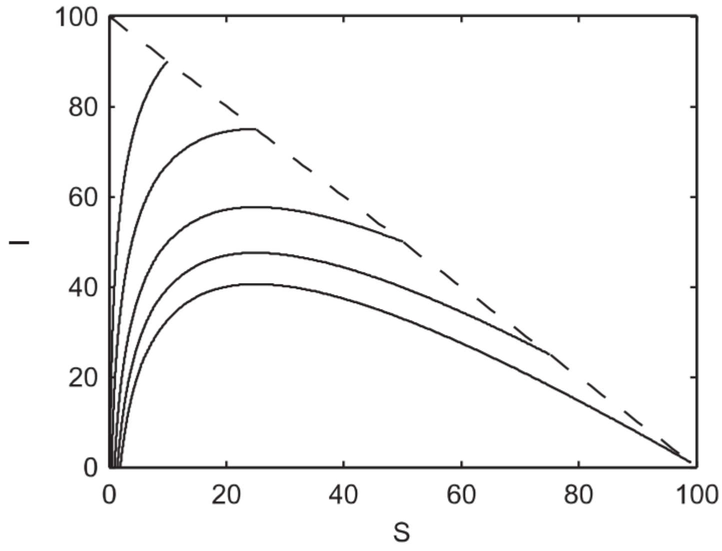
với N là tổng kích thước dân số.

Giả sử ta có điều kiện đầu $S(t=0) = S_0,\ I(t=0) = I_0,\ R(t=0) = 0$, tức tại thời điểm bắt đầu khảo sát, ta có S_0 người chưa mắc bệnh, I_0 người đã nhiễm bệnh và chưa có ai khỏi bệnh (hoặc chết vì bệnh đó). Từ phương trình (6.15), ta được:

$$\frac{d}{dt}(S + I + R) = 0S(0) + I(0) + R(0) = S_0 + I_0 \tag{6.16}$$

Trong bất kỳ dịch bệnh nào, người ta thường hỏi rằng nếu biết r, a, S_0 và I_0 người nhiễm bệnh thì

1. Dịch bệnh có lan rộng nữa không? Mức độ lan rộng theo thời gian như thế nào? Khi nào dịch bệnh kết thúc?



Hình 6.4: Nghiệm số của mô hình SIR của phương trình (6.2.1) – (6.2.3), đường nét đứt là $S + I = S_0 + I_0$, đường trơn là quỹ đạo pha, $r = 0.01, a = 0.25$

Từ phương trình (6.12)

$$\frac{dS}{dt} = -rSI \tag{6.17}$$

Do vế phải không thể dương nên S giảm, hay nói cách khác, số người dễ bệnh giảm theo thời gian. Do đó $S \leq S_0$.

Mặt khác, từ phương trình (6.13)

$$\frac{dI}{dt} = rSI - aI = I\left(rS - a\right) < I\left(rS_0 - a\right) \tag{6.18}$$

Vậy dịch bệnh sẽ không còn lan rộng, ít nhất là giữ nguyên nếu $I\left(rS_0 - a\right) < 0$ và dịch bệnh sẽ lan rộng nếu $I\left(rS_0 - a\right) > 0$.

Nếu $S_0 < a/r$ thì

$$\frac{dI}{dt} = I\left(rS - a\right) \leq 0, \forall t \geq 0 \tag{6.19}$$

Khi đó $I_0 > I\left(t\right) \to 0$ khi $t \to \infty$, tức số lượng người nhiễm bệnh ngày càng giảm, dẫn đến dịch bệnh không còn khả năng lan rộng. Mặt khác, nếu $S_0 > a/r$ thì $I\left(t\right)$ tăng, dẫn đến dịch bệnh lan rộng. Khái niệm "lan rộng" có nghĩa rằng $I\left(t\right) > I_0$ với một vài giá trị $t > 0$, từ đó ta có khái niệm ngưỡng hiện tượng, nếu $S_0 > S_c = a/r$ thì dịch bệnh lan rộng, còn nếu $S_0 < S_c$ thì không. Tham số tới hạn $\rho = a/r$ còn được gọi là tốc độ hết bệnh tương đối.

2. Nếu dịch bệnh lan rộng thì có nhiều nhất bao nhiêu người sẽ nhiễm bệnh ứng với thời gian cho trước bất kỳ?

Từ biểu thức định luật tác dụng khối lượng

$$S + I \xrightarrow{r} 2I$$

Ta nhận thấy sự thay đổi số người nhiễm bệnh có phụ thuộc đến sự thay đổi số người dễ bệnh. Do đó, ta lấy phương trình (6.13) chia cho phương trình (6.12), thu được tốc độ thay đổi tức thời của người nhiễm bệnh theo người dễ bệnh

$$\frac{dI}{dS} = -\frac{(rS - a)\,I}{rSI} = -1 + \frac{\rho}{S}; \rho = \frac{a}{r},\ (I \neq 0) \tag{6.20}$$

Lấy tích phân phương trình (6.20), ta được mặt phẳng quỹ đạo pha $(I,\ S)$, hình 6.4 là đồ thị của mặt phẳng này:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dS} &= -1 + \frac{\rho}{S} \\ \Leftrightarrow dI &= \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS \\ \Rightarrow \int dI &= \int \left(-1 + \frac{\rho}{S}\right) dS \\ \Rightarrow I + \text{ const } &= -S + \rho \ln S + \text{ const} \\ \Rightarrow I + S - \rho \ln S = \text{ const } &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \end{aligned} \tag{6.21}$$

Để tìm giá trị cực đại, trước hết ta tìm nghiệm của phương trình $dI/dS = 0$

$$\frac{dI}{dS} = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{\rho}{S} = 0 \Rightarrow S = \rho$$

Trong trường hợp $S_0 < \rho$, khi đó dịch bệnh không lan rộng, số lượng người nhiễm bệnh có xu hướng giảm xuống. Từ đó, ta được $I_{\max} = I_0$, tức số người nhiễm bệnh nhiều nhất xác định tại $t = 0$ với I_0 người.

Trong trường hợp $S_0 > \rho$, thay $S = \rho$ vào phương trình (6.21), ta được:

$$\begin{aligned} I + \rho - \rho \ln \rho &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \\ \Leftrightarrow I &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 + \rho \ln \rho - \rho \\ \Leftrightarrow I &= N - \rho + \rho \ln \left(\frac{\rho}{S_0}\right) \end{aligned} \tag{6.22}$$

Ta chứng minh biểu thức (6.22) của I chính là giá trị lớn nhất, ta có miền xác định của $S \in [0, S_0]$. Do $\ln S$ không xác định tại $S = 0$ nên ta tìm giới hạn của I ở biểu thức (6.21) khi $S \to 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{S\to 0} \left(N - \rho + \rho \ln \left(\frac{S}{S_0}\right)\right) \\ =& N - \rho + \rho \lim_{S\to 0} \left(\ln \left(\frac{S}{S_0}\right)\right) \\ =& -\infty \end{aligned}$$

Vẽ bảng biến thiên:

S	0		ρ		S_0
dI/dS		$+$	0	$-$	
I	$-\infty$	$\nearrow$	(6.22)	$\searrow$	I_0

Từ bảng biến thiên, kết hợp $I_0 \geq 0$, ta kết luận trong trường hợp $S_0 < \rho$ thì $I_{\max} = I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 - \rho \ln \rho - \rho$ Ta có kết luận về số người nhiễm bệnh nhiều nhất như sau:

$$I_{\max} = \begin{cases} I_0 \ ; S_0 < \rho \\ I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 - \rho \ln \rho - \rho \ ; S_0 > \rho \end{cases} \tag{6.23}$$

3. Tổng cộng có bao nhiêu người nhiễm bệnh?

Vì trục $I = 0$ là đường kỳ dị nên mọi quỹ đạo I tiến đến 0 khi $t \to \infty$. Mặt khác, người trong lớp I sau một thời gian sẽ hết bệnh (hoặc chết vì bệnh này) và chuyển sang lớp R. Do đó, tổng số người mắc bệnh bằng $R(\infty)$ xác định bằng cách chuyển vế phương trình (6.15) với $t = \infty$ như sau

$$R(\infty) = N - S(\infty) - I(\infty) = N - S(\infty) \tag{6.24}$$

Ta tính $S(\infty)$ bằng cách thay $t = \infty$ vào phương trình (6.21) như sau

$$\begin{aligned} I(\infty) + S(\infty) - \rho \ln S(\infty) &= I_0 + S_0 - \rho \ln S_0 \\ \Leftrightarrow S(\infty) - \rho \ln S(\infty) &= N - \rho \ln S_0 \end{aligned} \tag{6.25}$$

Ta giải phương trình (6.24) để tìm $S(\infty)$, với $0 \leq S(\infty) \leq S_0$. Ta chứng minh phương trình (6.24) luôn có nghiệm bằng cách đặt $x = S(\infty)$, với $0 \leq x \leq S_0$, ta tìm nghiệm phương trình $f(x) = 0$ với

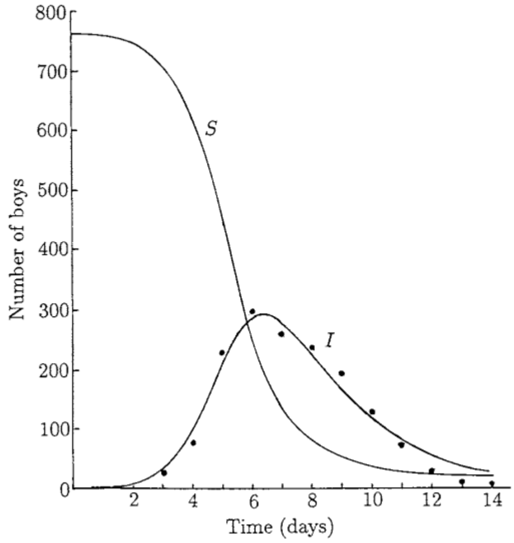
$$f(x) = x - \rho \ln x - N + \rho \ln S_0 \tag{6.26}$$

Lấy đạo hàm $f(x)$, giải phương trình $f'(x) = 0$ như sau

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Rightarrow 1 - \frac{\rho}{x} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \rho \end{aligned}$$

Vẽ bảng biến thiên

x	0		ρ		S_0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\rho)$	$\nearrow$	$S_0 - N$

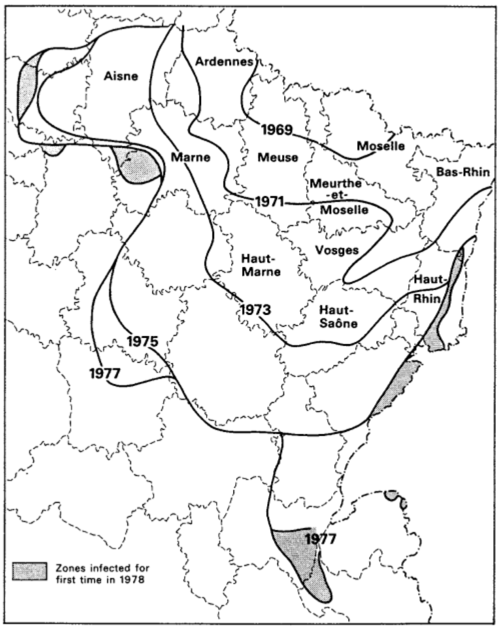


Hình 6.5: Đồ thị nghiệm xấp xỉ của $S(t)$ và $I(t)$ với dữ liệu dịch cúm (dấm chấm tròn đen) từ tạp chí The Lancet

Hàm $f(x)$ liên tục trên miền $[0, S_0]$, từ bảng biến thiên, ta được $f(\rho) \leq S_0 - N \leq 0$. Mặt khác, có $f(0) > 0$, do đó, phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm trên đoạn $[0, \rho]$. Vậy phương trình (6.24) luôn tồn tại nghiệm $S(\infty)$, thay nghiệm này vào phương trình (6.24), ta thu được tổng số người nhiễm bệnh.

6.2.3 Ứng dụng của mô hình SIR

Vào năm 1978, tạp chí y khoa Anh *The Lancet* có bài viết cung cấp một số dữ liệu thống kê về dịch cúm tại một trường nội trú nam sinh. Trường này có tổng cộng 763 nam sinh, từ ngày 22/1/1978 đến ngày 4/2/1978 có tổng cộng 512 em nhiễm bệnh và người ta dự đoán ban đầu có 1 em bị bệnh. Từ dữ kiện trên, ta được $N = 763, S_0 = 762, I = 1.\rho = 202, r = 2.18 \times 10^{-3}$/ngày, xấp xỉ phương trình (6.12)-(6.14) được nghiệm $S(t)$ và $I(t)$, nghiệm $R(t)$ tỷ lệ với diện tích dưới đường cong $I(t)$.



Hình 6.6: Độ lan truyền bệnh dại trên động vật ở châu Âu từ 1969 đến 1977

6.2.4 Mô hình SIR trong không gian không thuần nhất

Bệnh dại là bệnh có tính lan truyền trên khắp Thế Giới. Khoảng vài trăm năm trở lại đây, các nước châu Âu phải hứng chịu nhiều đợt bệnh dại, đơn cử như dịch xảy ra trên các loài động vật bắt đầu tại Ba Lan vào năm 1939 và lan truyền về hướng Tây với tốc độ 30 – 60 km mỗi năm. Hiện nay, bệnh này đã được kìm hãm và loài sói đỏ là vật chủ truyền bệnh cũng như là loài nhiễm bệnh trong suốt dịch bệnh tại châu Âu. Độ lan truyền bệnh dại có dạng giống như sóng lưu động như hình 6.6. Loài sói đỏ chiếm đến 70% trường hợp ghi nhận được ở phía Tây Âu. Mặc dù Anh Quốc không còn bệnh dại kể từ năm 1900, nhưng chính sách nhập khẩu thú cưng mang lại nguy cơ bùng phát bệnh này, đặc biệt khi Anh có mật độ loại sói, chó và mèo ở mức cao. Tại Bristol, mật độ loài sói là 12 con/km^2. Do đó, để kiểm soát cũng như ngăn ngừa sự lan truyền bệnh dại, ta cần biết bệnh dại lan truyền như thế nào. Ta nghiên cứu mô hình đơn giản dưới đây với các giả thiết giống với mô hình SIR, cộng thêm giả thiết

- Sói khỏe (dễ bệnh): Loại sói này có lãnh thổ riêng và nhìn chung chúng không di chuyển ra khỏi lãnh thổ.
- Sói dại (nhiễm bệnh): Loại sói này do nhiễm bệnh nên tính cách thay đổi thất thường và hay đi khắp nơi với hệ số khuếch tán $D\,\text{km}^2/$ năm.
- Virus bệnh dại nằm trong con sói dại được truyền từ sói dại sang sói khỏe với tốc độ nhiễm bệnh rI, với r là hệ số truyền bệnh.

- Bệnh dại rất nguy hiểm nên sói dại sẽ chết với tốc độ a, tức thời gian sống của sói dại là $1/a$.

Từ các giả thiết trên, ta được mô hình SIR xét trong một chiều

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -rIS \tag{6.27}$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + rIS - aI \tag{6.28}$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = aI \tag{6.29}$$

Ta viết gọn 3 phương trình trên bằng các cách đặt

$$I_* = \frac{I}{S_0}, S_* = \frac{S}{S_0}, x_* = \sqrt{\frac{D}{rS_0}}x, t_* = rS_0t, \lambda = \frac{a}{rS_0}$$

1. Biến đổi phương trình (6.27)

Ta có:

$$S = S_*S_0 \Longrightarrow \partial S = S_0 \partial S_*$$
$$t = \frac{1}{rS_0}t_* \Longrightarrow \partial t = \frac{1}{rS_0}\partial t_*$$
$$I = I_*S_0$$

Thay vào phương trình (6.27), ta được

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -rIS$$
$$\Leftrightarrow \frac{S_0\partial S_*}{\frac{1}{rS_0}\partial t_*} = -r(I_*S_0)(S_*S_0)$$
$$\Leftrightarrow r(S_0)^2\frac{\partial S_*}{\partial t_*} = -r(S_0)^2 I_*S_*$$
$$\Leftrightarrow \frac{\partial S_*}{\partial t_*} = -I_*S_* \tag{6.30}$$

2. Biến đổi phương trình (6.28)

Ta có:

$$I = I_*S_0 \Longrightarrow \partial I = S_0\partial I_* \Longrightarrow \partial^2 I = S_0 \partial^2 I_*$$
$$t = \frac{1}{rS_0}t_* \Longrightarrow \partial t = \frac{1}{rS_0}\partial t_*$$
$$x_* = \sqrt{\frac{rS_0}{D}}x \Longrightarrow \partial^2 x = \frac{D}{rS_0}\partial^2 x_*$$
$$S = S_*S_0$$

Thay vào phương trình (6.28), ta được

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + rIS - aI \\
\Leftrightarrow \frac{S_0 \partial I_*}{\frac{1}{rS_0}\partial t_*} &= D\frac{S_0\partial^2 I_*}{\frac{D}{rS_0}\partial x_*^2} + r\left(I_* S_0\right)\left(S_* S_0\right) - aI_* S_0 \\
\Leftrightarrow r(S_0)^2\frac{\partial I_*}{\partial t_*} &= r(S_0)^2\frac{\partial^2 I_*}{\partial x_*^2} + r(S_0)^2 I_* S_* - aI_* S_0 \\
\Leftrightarrow \frac{\partial I_*}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 I_*}{\partial x_*^2} + I_* S_* - \frac{a}{rS_0} I_* \\
\Leftrightarrow \frac{\partial I_*}{\partial t_*} &= \frac{\partial^2 I_*}{\partial x_*^2} + I_*\left(S_* - \lambda\right) \qquad (6.31)
\end{aligned}
$$

Thay $S_* = S, I_* = I, t_* = t$, ta thu được hệ rút gọn

$$
\begin{array}{c}
\frac{\partial S}{\partial t} = -IS \\
\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + I\left(S - \lambda\right)
\end{array} \qquad (6.32)
$$

và lúc này S, I, x và t không có thứ nguyên và $\lambda = a/rS_0$ là mức đo tốc độ chết so sánh với tốc độ truyền bệnh. Nghiệm sóng lưu động của (6.32) có dạng

$$
S\left(x,\ t\right) = S\left(y\right), I\left(x,t\right) = I\left(y\right), y = x - ct \qquad (6.33)
$$

với c là tốc độ sóng. Từ dạng nghiệm sóng, ta viết lại hệ (6.32) như sau

$\frac{\partial S}{\partial t} = -IS$	$\frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + I\left(S - \lambda\right)$
$\frac{\partial S}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = -IS$ $-cS' = -IS$ $\Leftrightarrow 0 = cS' - IS$	$\frac{\partial I}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + I\left(S - \lambda\right)$ $-cI' = I'' + I\left(S - \lambda\right)$ $\Leftrightarrow 0 = I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right)$

Vậy ta được hệ

$$
\begin{array}{c}
0 = cS' - IS \\
0 = I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right)
\end{array} \qquad (6.34)
$$

Ta giả sử $\lambda = a/\left(rS_0\right) < 1$ nhằm đảm bảo điều kiện dịch bệnh đang lan rộng.

Điều kiện đầu của nghiệm sóng lưu động là

$$
S\left(\infty\right) = 1, S'\left(-\infty\right) = 0, I\left(\infty\right) = I\left(-\infty\right) = 0
$$

Lưu ý rằng $S'\left(-\infty\right) = 0$ vì ta muốn ước đoán số lượng sói khỏe còn sống sót sau dịch bệnh.

Ta viết $S = 1 - P$ và viết lại hệ (6.34) dưới dạng tuyến tính

$$\begin{aligned}
&\begin{matrix} 0 = cS' - IS \\ 0 = I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right) \end{matrix} \\
\Leftrightarrow &\begin{matrix} 0 = -cP' - I + IP \\ 0 = I'' + cI' + I - I\lambda - IP \end{matrix} \\
\approx &\begin{matrix} 0 = -cP' - I \\ 0 = I'' + cI' + I\left(1 - \lambda\right) \end{matrix}
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Ta tìm nghiệm của hệ (6.35) bằng cách đặt $\gamma = I'$, khi đó $\gamma' = I'' = -cI' - I\left(1 - \lambda\right)$.

$$\begin{cases} I' = \gamma = f\left(I, \gamma\right) \\ f' = -c\gamma - I\left(1 - \lambda\right) = g\left(I, \gamma\right) \end{cases}$$

Ta được ma trận Jacobi

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial I} & \frac{\partial f}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial g}{\partial I} & \frac{\partial g}{\partial \gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\left(1 - \lambda\right) & -c \end{pmatrix}$$

Ta tìm trị riêng μ của J bằng cách giải phương trình

$$\begin{aligned}
&\det\left|J - \mu I\right| = 0 \\
\Leftrightarrow &\det\begin{pmatrix} -\mu & 1 \\ -\left(1 - \lambda\right) & -c - \mu \end{pmatrix} = 0 \\
\Leftrightarrow &\mu\left(c + \mu\right) + \left(1 - \lambda\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &\mu^2 + c\mu + \left(1 - \lambda\right) = 0
\end{aligned}$$

Tính biệt thức $\Delta = c^2 - 4\left(1 - \lambda\right)$, khi đó ta được 2 trị riêng

$$\mu = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4\left(1 - \lambda\right)}}{2}$$

Hệ (6.35) có nghiệm tập trung ổn định tại $\left(I, I'\right) = (0, 0)$ nếu μ là số phức, khi đó $\Delta < 0$ và tồn tại những vị trí để $I < 0$, điều này là không thực tế, do đó $\Delta \geq 0$, suy ra $c \geq 2\sqrt{1 - \lambda}$.

Bây giờ ta sẽ tính mức độ nghiêm trọng của dịch bệnh bằng cách tính $S\left(\infty\right)$ với ý nghĩa ước lượng khi dịch bệnh kéo dài thì còn bao nhiêu con sói khỏe. Từ phương trình đầu của hệ (6.34), ta được $I = cS'/S$, thay xuống phương trình thứ hai, ta được:

$$\begin{aligned}
&I'' + cI' + I\left(S - \lambda\right) = 0 \\
\Leftrightarrow &I'' + cI' + \frac{cS'\left(S - \lambda\right)}{S} = 0 \\
\Leftrightarrow &I'' + cI' = -cS'\left(1 - \frac{\lambda}{S}\right)
\end{aligned}$$

Nguyên hàm hai vế, ta được:

$$\int \left(I'' + cI'\right) dy = -c \int S' \left(1 - \frac{\lambda}{S}\right) dy$$
$$\Longrightarrow I' + cI + \text{const}_1 = -cS + c\lambda \ln S + \text{const}_2$$
$$\Longrightarrow \left(I' + cI\right) + c\left(S - \lambda \ln S\right) = \text{constant} \tag{6.36}$$

Sử dụng điều kiện đầu khi $y \to \infty$, với $S(\infty) = 1, I(\infty) = 0$ và với $I'(\infty) = 0$, thay vào (6.36), thu được hằng số là c.

Ta tính $S(-\infty)$ bằng cách thay $I(-\infty) = 0,\ I'(-\infty) = 0$ vào phương trình (6.36) với hằng số bằng c, ta được phương trình

$$S(-\infty) - \lambda \ln S(-\infty) = 1 \tag{6.37}$$

Ta chứng minh phương trình (6.37) có nghiệm $S(-\infty)$. Đặt $\sigma = S(-\infty)$, thay vào (6.37), ta được $f(\sigma) = \sigma - \lambda \ln \sigma - 1$, ta tìm nghiệm phương trình $f(\sigma) = 0$ với $\lambda, \sigma < 1$.

Tìm nghiệm $f'(\sigma) = 0$

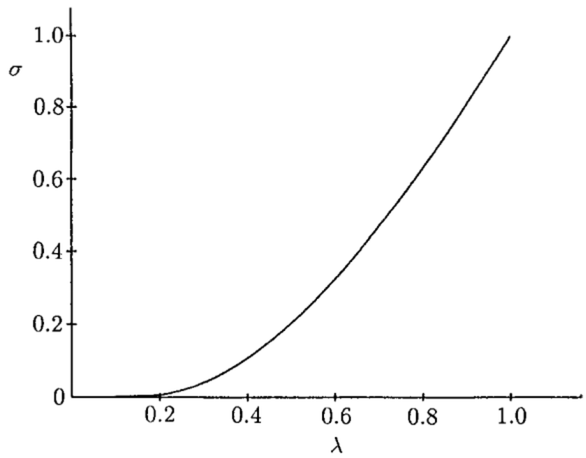
$$f'(\sigma) = 0$$
$$\Longrightarrow 1 - \frac{\lambda}{\sigma} = 0$$
$$\Leftrightarrow \sigma = \lambda$$

Kẻ bảng biến thiên, ta được:

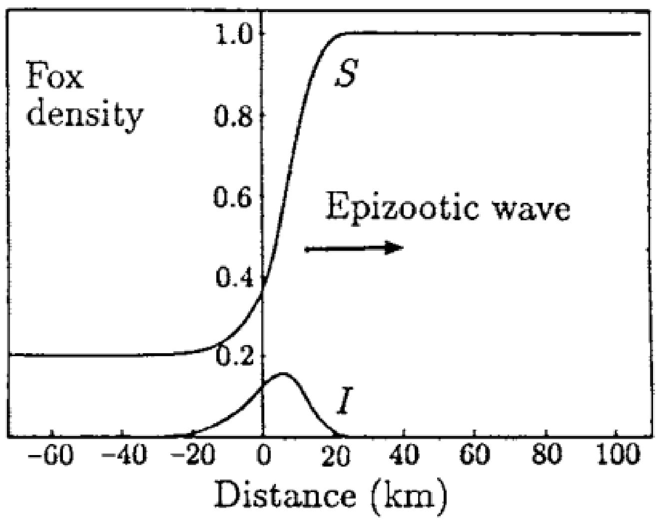
σ	0		λ		1
$f'(\sigma)$		$-$	0		$+$
$f(\sigma)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\sigma)$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta được $f(\sigma) \leq 0$. Mặt khác, có $f(\sigma \to 0) > 0$, kết hợp hàm $f(\sigma)$ liên tục trên $(0, \lambda]$ nên phương trình $f(x\sigma) = 0$ có nghiệm $\sigma \in (0, \lambda]$. Do đó, (6.37) có nghiệm với $0 < S(-\infty) < \lambda < 1$. Khi λ càng nhỏ thì càng ít loài sói sống sót, hay nói cách khác, dịch bệnh càng trầm trọng. Hình 6.7 minh họa số lượng sói khỏe theo phương trình (6.37) theo biến $\sigma = S(-\infty)$. Thông thường, sóng sẽ có tốc độ nhỏ nhất $c \simeq c_{min} = 2\sqrt{1-\lambda}$.

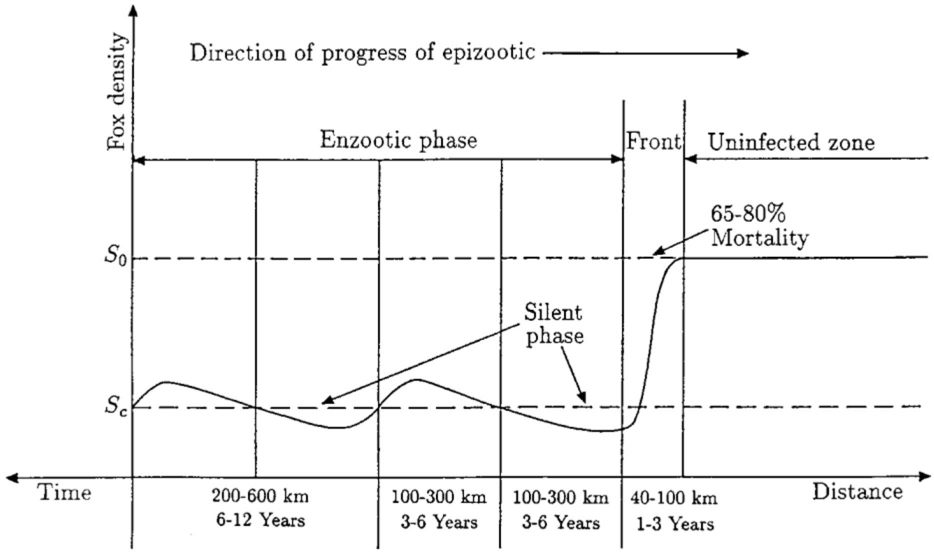
Hình 6.8 biểu diễn nghiệm xấp xỉ của sóng lưu động cho S và I từ hệ (6.32), với $\lambda = 0.5$. Ở hình 6.7 với $\lambda = 0.5$ thì tỉ lệ sói sống sót là $\sigma \approx 0.2$. Ta so sánh kết quả xấp xỉ của số lượng sói khỏe trong dịch bệnh với kết quả dữ liệu thực tế thu được ở châu Âu ở hình 6.9. Đồ thị của kết quả xấp xỉ và dữ liệu thực tế có trạng thái khác biệt rõ ràng. Mô hình (6.32) chỉ bảo đảm từ giai đoạn *"front"* trở đi. Rõ ràng sau một đoạn sóng thì số loài sói khỏe bắt đầu tăng lên do loài sói đã tìm được môi trường để trú ẩn, hay nói cách khác, thang đo thời gian của mô hình (6.32) được mô tả ngắn hơn so với độ dao động trong hình 6.9.



Hình 6.7: σ là mật độ sói khỏe còn sống sót sau khi trải qua sóng dịch bệnh dựa vào hàm số độ nghiêm trọng (6.37)



Hình 6.8: Nghiệm sóng lưu động của hệ (6.32) với mật độ sói khỏe (S) và sói bệnh (I) với $\lambda = 0.5$ và tốc độ sóng $c = \sqrt{2}$.



Hình 6.9: Dữ liệu từ *Centre National d'Etudes sur* la Rage vào năm 1977. Có biến động ở số lượng sói khỏe biểu diễn theo hàm số dịch bệnh dại theo thời gian.

6.3 Tài liệu tham khảo

(1) Kermack, W. O. và A. G. McKendrick. "A contribution to the mathematical theory of epidemics." Proceedings of the Royal Society of London A: mathematical, physical and engineering sciences (1927): Vol. 115, No. 772, pp. 700-721. The Royal Society.

(2) Murray, J. D. Mathematical Biology I: An Introduction. New York: Springer New York, 2002. Book.

(3) Murray, J.D. Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications. New York: Springer New York, 2003. Book.