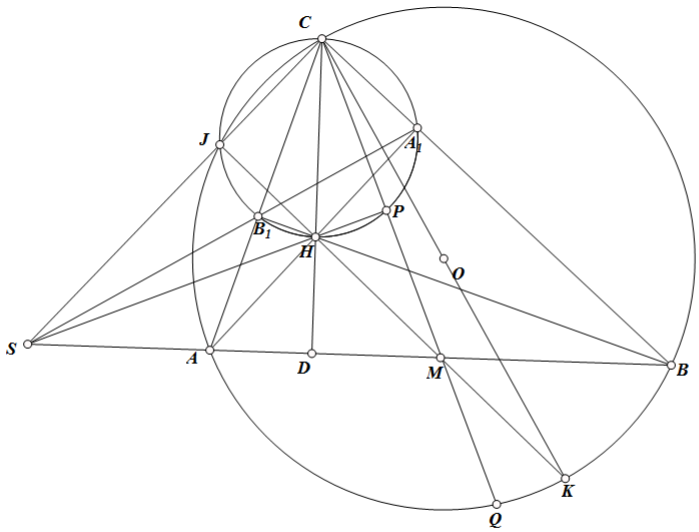
Tìm tòi mở rộng một bài hình học hay trong đề chọn đội tuyển Quảng Ninh 2015-2016

Nguyễn Duy Khương-chuyên Toán khoá 1518-THPT chuyên Hà Nội Amsterdam

Tóm tắt nội dung: Bài viết đề cập về một đề toán hay và nhiều ý nghĩa từ đề chọn đội tuyển **Quảng Ninh 2015** để từ đó phát triển, mở rộng lên thành một số bài toán khác liên quan.

Bài toán 1(Chọn đội tuyển VMO Quảng Ninh 2015, ngày 2): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). AA_1, BB_1 là các đường cao của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm AB. CM cắt $(CA_1B_1), (O)$ lần lượt tại P, Q. Chứng minh rằng: $MP = MQ$.

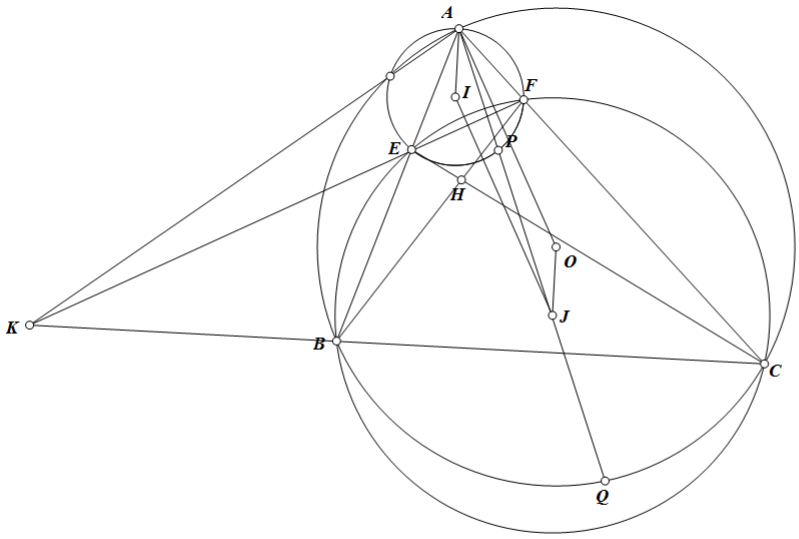


Lời giải: Gọi $S = A_1B_1 \cap AB$, $J = SC \cap (O) \neq C$. Ta để ý rằng các tứ giác $A_1B_1AB, JCBA$ nội tiếp nên $SJ.SC = SB_1.SA_1 = SA.SB$ hay là $J \in (CH)$. Ta đã biết kết quả quen thuộc rằng: J, H, M thẳng hàng và vuông góc SC thế nên H là trực tâm CMS nên S, H, P thẳng hàng. Gọi $CH \cap AB = D$ thì theo tính hàng điểm

điều hoà cơ bản thì: $(SD, AB) = -1$ nên $MA^2 = MB^2 = MD.MS = MP.MC = MQ.MC$ hay là $MP = MQ$(đpcm).

Nhận xét: Bài toán trên tuy không quá khó xong khá hay và nếu cho M là tâm (BC) trở thành tâm một đường tròn bất kì qua B, C thì kết luận trên vẫn đúng, ta sẽ xét lời giải bài toán đó.

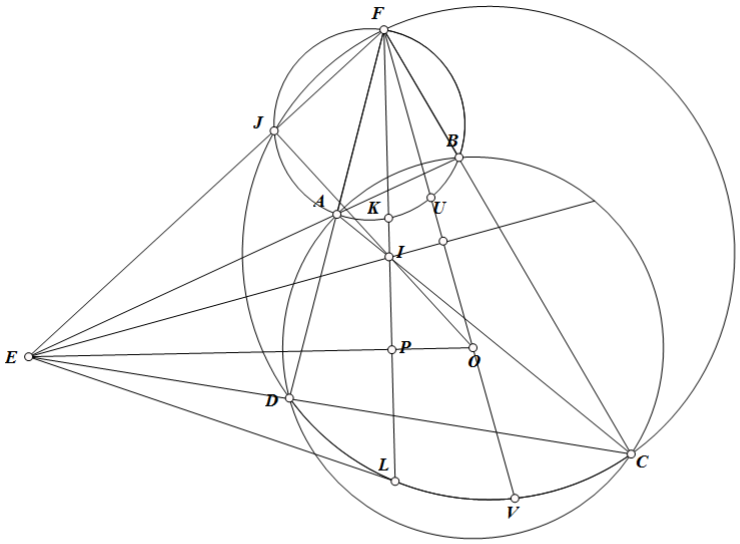
Bài toán 2(Mở rộng 1 bài toán 1): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). (J) là 1 đường tròn qua B, C cắt AB, AC tại E, F. Gọi AJ cắt (AEF) tại $P \neq A$. Gọi $AJ \cap (O) = A, Q$. Chứng minh rằng: J là trung điểm PQ.



Lời giải(Trương Mạnh Tuấn-THPT chuyên HSGS): Gọi I là tâm (AEF). Ta thấy rằng: $AIJO$ là 1 hình bình hành do đó $JI^2 - IA^2 = AO^2 - JO^2$ do đó $\overline{JP}.\overline{JA} = -\overline{JQ}.\overline{JA}$ hay $JP = JQ$(đpcm).

Nhận xét: Ta quay lại bài toán thứ nhất, khi gọi $CH \cap (O) = C, T$ thì ta dễ thấy $DH = DT$ hay là $MH = MT$. Điều này cũng chính là ý tưởng mở rộng tiếp theo của **bài toán 1**, thay H bằng giao điểm 2 đường chéo của đường tròn bất kì đi qua B, C. Bất ngờ là khi tôi đọc một tài liệu khác thì thấy bài toán này chính là một đề thi đã được tác giả **Nguyễn Minh Hà** đề nghị trên cuộc thi toán **Mathley**.

Bài toán 3(Mở rộng 2 bài toán 1,Mathey, Nguyễn Minh Hà): Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Giả sử $AB \cap CD = E, AD \cap BC = F, AC \cap BD = I$. $(FAB), (FAC) \cap FI = K, L \neq F$. Chứng minh rằng: $EK = EL$.



Lời giải 1(Nguyễn Văn Linh)(Bạn đọc tự vẽ hình): Lời giải sử dụng công cụ tỉ số phương tích đã khai thác triệt để các giả thiết của bài toán. Gọi $H = EO \cap FI$. Gọi M, N là trung điểm của AD, BC. Theo định lí *Borcard* thì: $EO \perp FI$. Vậy A, M, N, H, O đồng viên. Ta thấy rằng: $\dfrac{P_{M/(FAB)}}{P_{M/(FCD)}} = \dfrac{\overline{MA}.\overline{MF}}{\overline{MD}.\overline{MF}} = -1$. Hoàn toàn tương tự thì: $\dfrac{P_{N/(FAB)}}{P_{N/(FCD)}} = -1$ do đó $(FMN), (FAB), (FCD)$ đồng trục. Do $H \in (FMN)$ nên $\dfrac{P_{H/(FAB)}}{P_{H/(FCD}} = -1$. Do đó $\dfrac{\overline{HK}.\overline{HF}}{\overline{HL}.\overline{HF}} = -1 \Rightarrow H$ là trung điểm KL. Đến đây ta thấy đpcm.

Lời giải 2: Bài toán chứng minh với trường hợp như hình vẽ các trường hợp khác chứng minh tương tự. Việc tận dụng được **bài toán 2** chính là mấu chốt trong việc giải **bài toán 3** này. Ở đây tôi xin giới thiệu lời giải của mình cho **bài toán 3**. Trước khi giải bài toán ra cần có 2 bổ đề:

Bổ đề 1: "Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) không phải là một hình thang. Gọi AB cắt CD tại E. AD cắt BC tại điểm F, gọi giao điểm 2 đường chéo tứ giác là I. Gọi L là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Khi đó $\overline{O, I, L} \perp EF$."

Chứng minh(Bạn đọc tự vẽ hình): Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC. Ta có: $\angle LAD = 180^\circ - \angle LAF = 180^\circ - \angle LBF = \angle LBC$. Vậy ta có: $\triangle LAM \sim \triangle LBN(c.g.c)$ do đó $\angle LMF = \angle LNF$ hay là L thuộc (FMN). Vậy ta thu được:

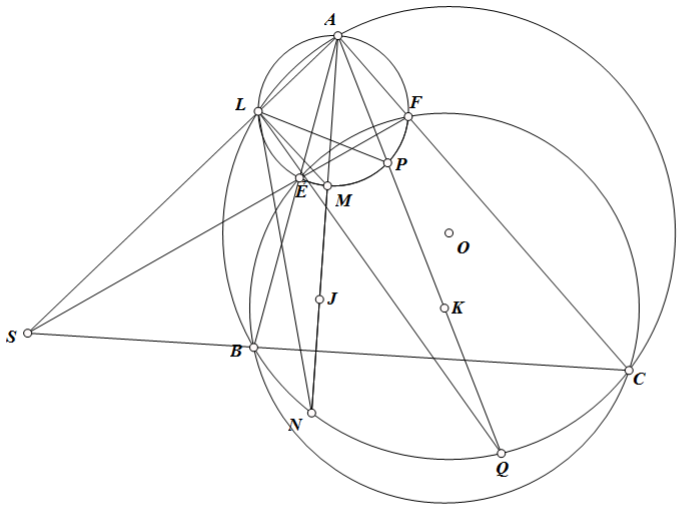
$\angle OLF = 90°$.

Bổ đề 2: Chính là **Bài toán 2**.

Quay trở lại bài toán, gọi J là điểm *Miquel* của tứ giác toàn phần $ABCD.EF$. Áp dụng *bổ đề 1* và định lí *Borcard* thì: O, I, J thẳng hàng và cùng vuông góc EF đồng thời I là trực tâm $\triangle OEF$ nên $FI \perp OE$. Gọi $FO \cap (FAB), (FCD) = U, V \neq F$, áp dụng *bổ đề 2* thì: O là trung điểm UV. Gọi P là trung điểm KL ta có: $\triangle JKL \sim \triangle JOU(g.g)$ do đó $\triangle JKP \sim \triangle JUO(c.g.c)$ vậy $\angle JPI = \angle IOU = \angle JEI$ vậy tứ giác $JIPE$ nội tiếp hay là $\angle IPE = 90°$ hay là $IF \perp EP$ mà $FI \perp OE$ nên E, P, O thẳng hàng do đó $EP \perp KL$ hay thu được $\triangle EKL$ cân tại $E \Rightarrow EK = EL$(đpcm).

Nhận xét: Nhìn qua ba bài toán ở trên đặc biệt là các trường hợp mở rộng ở các **bài toán 2, bài toán 3** thì ta đặt ra câu hỏi liệu có thể thay cát tuyến qua A như ở hai bài trên bằng cát tuyến bất kì qua A hay không. Để trả lời câu hỏi đó tôi xin nêu ra bài toán tổng quát.

Bài toán 4(Tổng quát bài toán 1,2,3): Cho tam giác ABC nội tiếp (O) và 1 đường tròn (K) qua B, C cắt AB, AC tại các điểm E, F. Một đường thẳng d bất kì qua A cắt $(AEF), (O)$ tại các điểm M, N. Chứng minh rằng: $KM = KN$



Lời giải 1(Nguyễn Duy Khương): Ta chứng minh trong trường hợp hình vẽ trên các trường hợp còn lại ta chứng minh tương tự. Gọi $L, A = (AEF) \cap (O)$, chú ý AL, EF, BC đồng quy tại điểm S nên theo định lí *Borcard* cho tứ giác toàn phần

$BEFC.AS$ thì: $\angle LKA = 90^\circ$ Gọi $AK \cap (AEF), (O) = P, Q \neq A$. Gọi J là trung điểm MN. Theo **bài toán 2** thì: K là trung điểm PQ. Ta có: $\triangle LMN \sim \triangle LPQ(g.g)$ nên $\triangle LJM \sim \triangle LKP(c.g.c)$ do đó $\angle LJM = \angle LKP$ nên L, A, J, K đồng viên vậy $\angle KJA = \angle KLA = 90^\circ$ do đó KJ là trung trực MN hay là $KM = KN$(đpcm).

Lời giải 2(Trương Mạnh Tuấn-THPT chuyên KHTN)(Bạn đọc tự vẽ hình): Xét phép nghịch đảo tâm A tỉ số $AE.AB$ ta chuyên bài toán thành như sau: "Cho tam giác ABC, đường tròn B, C cắt AB, AC tại B', C'. Một cát tuyến qua A cắt $BC, B'C'$ tại M', N'. Giả sử $B'C' \cap BC = X$. Ta cần chứng minh: KX là phân giác $\angle N'KM'$."

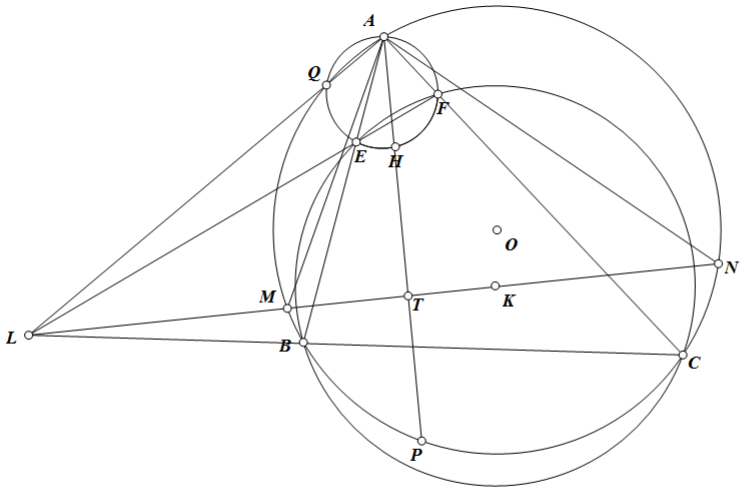
Ta đi chứng minh bài toán mới này, gọi cát tuyến qua A cắt KX tại W, $AX \cap BC, B'C' = U, V$.

Ta có: $K(XA, M'N') = (WA, M'N') = L(WA, M'N')$=$L(XA, UV) = (XA, UV) = -1$ nên ta thu được đpcm.

Nhận xét: Ở **lời giải 1**, việc tận dụng kết quả **bài toán 2** chính là phương pháp hữu hiệu nhất đối với cả **bài toán 3** cùng bài toán tổng quát. Còn ở **lời giải 2** việc sử dụng phép nghịch đảo để đổi cấu hình đã giúp đơn giản bài toán đi nhiều. Bài toán tổng quát còn có một lời giải khác cũng bằng cách sử dụng phương pháp tượng tự **lời giải 1 bài toán 3** xong khá dài nên tôi không trình bày ở đây.

Khai thác tính chất ở cấu hình **bài toán 3** ta thu được bài toán sau, việc khai thác tính chất một bài toán là công việc hết sức thú vị bởi nó sẽ giúp liên hệ nhiều kiến thức đã biết về cấu hình đó.

Bài toán 5(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Một đường tròn (K) qua B, C cắt AB, AC tại E, F. Giả sử $EF \cap BC = L$, gọi $LK \cap (O) = M, N$. Chứng minh rằng trực tâm $\triangle AMN$ nằm trên (AEF).



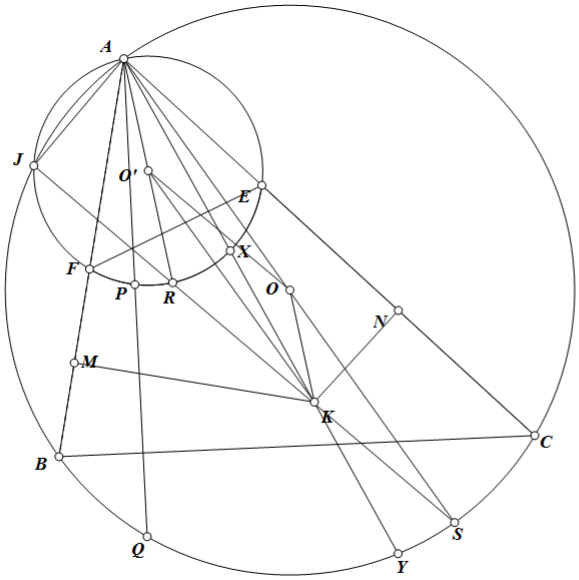
Lời giải: Đường cao qua A của tam giác AMN cắt $(AEF),(ABC)$ lần lượt tại các điểm $H, P \neq A$,$AP \cap MN = T$. Áp dụng **bài toán 3** cho các đường tròn $(O),(AEF),(K)$ thì: T là trung điểm HP do đó $\overline{TH}.\overline{TA} = \overline{TP}.\overline{TA} = \overline{TM}.\overline{TN}$ nên hiển nhiên thu được H là trực tâm tam giác AMN(đpcm).

Bạn đọc thử sức với bài toán sau, lời giải rất tương tự **bài toán 5**:

Bài toán 6(Nguyễn Duy Khương): Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). (K) là 1 đường tròn thay đổi qua B, C cắt AB, AC tại F, E. Một đường thẳng d qua A cắt $(O),(AEF)$ tại các điểm thứ hai P, Q. Gọi R là trung điểm PQ. Gọi $KR \cap (O) = M, N$. Chứng minh rằng trực tâm $\triangle AMN$ nằm trên (AEF).

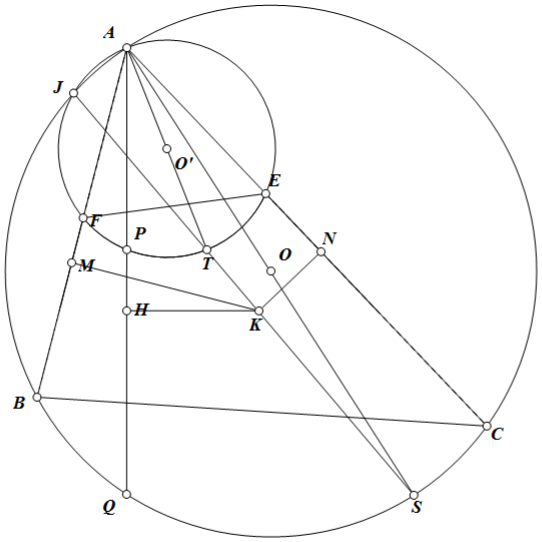
Cuối cùng xin đề cập hai bài toán tổng quát do bạn **Nguyễn Quang Trung,THPT chuyên Hoà Bình** đề xuất.

Bài toán 7(Nguyễn Quang Trung): Cho tam giác ABC và các điểm F, E lần lượt bất kì nằm trên các cạnh AC, AB. Đường trung trực của BF, CE cắt nhau ở K. Một cát tuyến qua A cắt $(O),(AEF)$ tại các điểm Q, P khác A. Chứng minh rằng: $KP = KQ$.



Lời giải(Nguyễn Duy Khương): Gọi O' là tâm (AEF), gọi $J, A = (AEF) \cap (O)$. Ta để ý rằng: $\triangle JBF \sim \triangle JCE(g.g)$ nên $\triangle JMF \sim \triangle JNE(c.g.c)$ hay là J, A, N, M, K đồng viên nên $\angle KJA = 90°$. Gọi R, S lần lượt đối xứng O', O qua A thì $\angle RJA = \angle KJA = \angle SJA = 90°$ nên J, R, K, S thẳng hàng do đó OO' đi qua trung điểm AK(theo tiên đề *Euclid*). Do đó $AO'KO$ là 1 hình bình hành. Gọi $AK \cap (AEF), (O) = A, X, Y$, do $-O'A^2 + KO'^2 = -OK^2 + OA^2$ hay là $P_{K/(O)} = -P_{K/(AEF)}$ nên $\overline{KX}.\overline{KA} = -\overline{KY}.\overline{KA}$ hay K là trung điểm XY. Gọi T là trung điểm của PQ thế thì dễ thấy $\triangle JTP \sim \triangle JKX(c.g.c)$ nên J, A, K, T đồng viên suy ra $\angle KTA = \angle KJA = 90°$ nên $KP = KQ$(đpcm).

Bài toán 8(Nguyễn Quang Trung): Cho tam giác ABC, E, F bất kì trên AC, AB. Lấy lần lượt các điểm M, N trên cạnh AB, AC sao cho $\dfrac{MF}{MB} = \dfrac{NE}{NC} = k$, đường thẳng qua M, N vuông góc với AB, AC cắt nhau tại K. Một cát tuyến qua A cắt $(AEF), (ABC)$ tại P, Q, hạ KH vuông góc xuống PQ thì $\dfrac{HP}{HQ} = k$.



Lời giải 1(Nguyễn Quang Trung): Ta thấy rằng: $\frac{P_(M/(AEF)}{P(M/(ABC)} = \frac{P(N/(AEF)}{P(N/(ABC)} = \frac{P(H/(AEF)}{P(H/(ABC)} = k$ mà dễ thấy (AMN) đồng trục với (EAF) và (ABC) nên $\frac{HP}{HQ} = k$(đpcm).

Lời giải 2(Nguyễn Duy Khương): Gọi $J, A = (AEF) \cap (O)$, O' là tâm của (AEF). Lấy các điểm T, S đối xứng A qua O', O. Ta dễ thấy rằng: $\triangle JBF \sim \triangle JEN(g.g)$ do đó $\triangle JFM \sim \triangle JEN(c.g.c)$ nên J, M, K, H, N, A đồng viên. Do đó J, T, K, S thẳng hàng, vì $PT \| KH \| QS$ nên $\frac{PH}{QH} = \frac{KT}{KS}$, lại có: $TE \| KN \| SC$ nên $\frac{KT}{KS} = \frac{EN}{NC} = \frac{PH}{QH} = k$(đpcm).

Nhận xét: Hai bài toán tổng quát trên cực kì thú vị, đặc biệt là bài toán cuối cùng **lời giải 2** là một lời giải hết sức sơ cấp với kiến thức THCS cũng hiểu được, đó là lời giải mà tôi đã tiếp nối khi có được lời giải **bài toán số 7**. Cách làm bằng tỉ số phương tích ở **lời giải 1 bài toán 8** là kéo dài xuyên suốt qua các bài toán mở rộng cũng như tổng quát xong khá là khó nắm bắt nếu không có hiểu biết đầy đủ về tỉ số phương tích. Bài toán gốc cùng những bài toán tổng quát còn có nhiều tính chất khá thú vị xong tôi muốn nhường lại cho bạn đọc tìm tòi, làm được một bài toán là tốt nhưng biết đào sâu thêm các tính chất và tổng quát được bài toán đó thì thực sự chính là mục đích cần hướng đến mỗi khi giải toán.