

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI  
TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN

---

**TỔ TOÁN TIN**

**ĐỀ THI VÀ ĐÁP ÁN CHỌN HỌC SINH GIỎI  
LỚP 10 MÔN TOÁN NĂM HỌC 2016-2017**

**Hà Nội, Năm 2017**

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10 NĂM HỌC 2016-2017**

**Môn thi: Toán học**

**Ngày thi thứ nhất**

***Thời gian làm bài: 180 phút***

**Câu 1.** Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 8} = \sqrt{y} + y^2 + 1 \\ \sqrt{y^2 + 8} = \sqrt{x} + x^2 + 1. \end{cases}$$

**Câu 2.** Cho các số thực  $a, b, c$  thoả mãn  $a \geq b \geq c \geq 0$  và

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức  $P = 2ab + 5ac + 8bc + \frac{15}{a + b + c}$ .

**Câu 3.**

- (a) Cho  $q$  là số nguyên tố mà  $q \equiv 1 \pmod{4}$ . Chứng minh rằng tồn tại số nguyên  $k$  sao cho  $k^2 \equiv -1 \pmod{q}$ .
- (b) Xác định tất cả các bộ ba  $(a, b, c)$  là các số nguyên thoả mãn tính chất: Với mọi số nguyên tố lẻ  $p$  thì

$$a \left( 1 \times 2 \times \cdots \times \frac{p-1}{2} \right)^2 + b \left( 1 \times 2 \times \cdots \times \frac{p-1}{2} \right) + c$$

chia hết cho  $p$ .

**Câu 4.** Cho tam giác  $ABC$  với  $AB > AC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Gọi  $I, I_a$  lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và bàng tiếp góc  $A$  của tam giác  $ABC$ .  $AI$  cắt  $BC$  tại  $D$  và cắt  $(O)$  tại điểm thứ hai  $M$ .  $N$  là điểm tùy ý nằm trên đoạn  $BD$ .  $(O_1)$  là đường tròn ngoại tiếp tam giác  $AND$ .  $(O_2)$  là đường tròn tiếp xúc trong với  $(O_1)$  tại điểm  $A$ .  $P, Q$  theo thứ tự là giao điểm thứ hai của  $(O_2)$  với  $(O)$  và  $AN$ . Chứng minh rằng

- (a)  $M, P, Q$  thẳng hàng.
- (b)  $NI_a \parallel PQ$ .

**ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 10 NĂM HỌC 2015-2016**

**Môn thi: Toán học**

**Ngày thi thứ hai**

***Thời gian làm bài: 180 phút***

**Câu 1.** Cho dãy số  $(x_n)$  thỏa mãn điều kiện  $x_1 = x_2 = 1$ ,  $x_3 = 3$  và  $x_n x_{n-3} = x_{n-1}^2 + x_{n-1} x_{n-2} + x_{n-2}^2$  với mọi  $n \geq 4$ . Chứng minh rằng mọi số hạng của dãy là số nguyên.

**Câu 2.** Cho  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} + \frac{3}{2} \geq \frac{(a+b+c)^3}{6abc}.$$

**Câu 3.** Cho tam giác nhọn  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ ,  $A$  thay đổi,  $B, C$  cố định.  $D, E, F$  theo thứ tự là hình chiếu của  $A, B, C$  trên  $BC, CA, AB$ . Các điểm  $P, Q$  theo thứ tự thuộc tia đối của các tia  $ED, FD$  sao cho  $EP = FQ = EF$ . Chứng minh rằng

(a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $DPQ$  luôn đi qua một điểm cố định.

(b) Đường thẳng qua  $A$  vuông góc với  $PQ$  luôn đi qua một điểm cố định.

**Câu 4.** Cho 7 số nguyên dương phân biệt  $a_1, \dots, a_7$ . Đổ qua tất cả các cặp chỉ số  $(i, j)$  với  $1 \leq i < j \leq 7$  ta viết các số  $a_i + a_j, |a_i - a_j|, a_i a_j$  lên bảng. Gọi  $G$  là tập các số nguyên dương lẻ trên bảng. Tìm giá trị lớn nhất của  $|G|$  khi  $a_1, \dots, a_7$  thay đổi.