INEQUALITIES FROM 2016 MATHEMATICAL OLYMPIADS

Tóm tắt nội dung. Tài liệu này tổng hợp bất đẳng thức từ các kỳ thi trên toàn thế giới năm 2016. Các bài toán được thảo luận tại *Diễn đàn Toán học*. File này được tạo ra từ file **ineq-2016-mo.lyx**, được lưu trữ tại http://toantinhoc.ga/forums/topic/mau-soan-tai-lieu-tong-hop-de-va-loi-giai/, và được phép tải về để tiếp tục chỉnh sửa cập nhật cho hoàn thiện. Xem hướng dẫn cài đặt và sử dụng LyX cũng như hỗ trợ cần thiết tại www.toantinhoc.ga.

https://diendantoanhoc.net/topic/156531-inequalities-from-2016-mathematical-olympiads/.

Bài 1 (Azerbaijan Junior Mathematical Olympiad)**.** Cho các số thực x, y, z. Chứng minh

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}}\geq 3\sqrt{2}.$$

Chứng minh. Áp dụng bất đẳng thức AM-GM hai lần ta có

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{z^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{x^2}}\geq \sqrt{2}\left(\sqrt{\left|\frac{x}{y}\right|}+\sqrt{\left|\frac{y}{z}\right|}+\sqrt{\left|\frac{z}{x}\right|}\right)\geq 3\sqrt{2}.$$

□

Bài 2 (China Western Mathematical Olympiad)**.** Cho $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là các số thực không âm, $S_k=\sum\limits_{i=1}^{k} a_i$ với mọi $1\leq k\leq n$. Chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n}\left(a_iS_i\sum_{j=i}^{n}a_j^2\right)\leq \sum_{i=1}^{n}\left(a_iS_i\right)^2.$$

Chứng minh. Ta có

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(a_iS_i\sum_{j=i}^{n}a_j^2\right)&=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\left(\sum_{k=1}^{i}a_i\right)\left(\sum_{j=i}^{n}a_j^2\right)\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\sum_{1\leq k\leq i\leq j}^{n}a_ka_j^2\right)\\&=\sum_{1\leq k\leq i\leq j\leq n}^{n}a_ka_ia_j^2=\sum_{1\leq i\leq j\leq n}^{n}a_i^2a_j^2+\sum_{1\leq k<i\leq j\leq n}^{n}a_ka_ia_j^2,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\left(a_iS_i\right)^2&=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\left(\sum_{j=1}^{i}a_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2\left(\sum_{j=1}^{i}a_i^2+2\sum_{1\leq j<k\leq i}a_ja_k\right)\\&=\sum_{1\leq j\leq i\leq n}a_j^2a_i^2+2\sum_{1\leq j<k\leq i\leq n}a_ja_ka_i^2.\end{aligned}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$0\leq \sum_{1\leq j<k\leq i\leq n}a_ja_ka_i^2.$$

Đẳng thức xảy ra khi $a_i=0$. □

Bài 3 (All Russian Olympiad, grade 9)**.** Cho a, b, c, d là các số dương sao cho $a+b+c+d=3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{d^2}\leq \frac{1}{a^2b^2c^2d^2}$$

Bài 4 (All Russian Olympiad, grade 11)**.** Cho a, b, c, d là các số dương sao cho $a+b+c+d = 3$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \frac{1}{d^3} \leq \frac{1}{a^3b^3c^3d^3}$$

Bài 5 (Azerbaijan BMO Team Selection Test)**.** Cho a, b, c là các số thực không âm. Chứng minh

$$3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}) + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq (a+b+c)^2$$

Bài 6 (Croatia Team Selection Test)**.** Cho $n \geq 1$ và $x_1, \ldots, x_n \geq 0$. Chứng minh

$$\left(x_1 + \frac{x_2}{2} + \ldots + \frac{x_n}{n}\right)(x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n) \leq \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

Bài 7 (EGMO)**.** Cho n là các số nguyên dương chẵn, và $x_1, x_2, \cdots, x_n$ là các số thực không âm. Chứng minh

$$\min_{i=1,\ldots,n}\left\{x_i^2 + x_{i+1}^2\right\} \leq \max_{j=1,\ldots,n}\{2x_jx_{j+1}\}$$

với $x_{n+1} = x_1$.

Bài 8 (EGMO Team Selection Test)**.** Chứng minh

$$x^4y + y^4z + z^4x + xyz(x^3+y^3+z^3) \geq (x+y+z)(3xyz-1)$$

với mọi số thực dương x, y, z.

Bài 9 (Korea National Olympiad Final Round)**.** Cho x, y, z thỏa $x^2+y^2+z^2 = 1$, tìm giá trị lớn nhất của

$$(x^2-yz)(y^2-zx)(z^2-xy)$$

Bài 10 (Hong Kong Team Selection Test)**.** Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $abc = 1$. Xác định gía trị nhỏ nhất có thể của

$$\frac{a^3+8}{a^3(b+c)} + \frac{b^3+8}{b^3(a+c)} + \frac{c^3+8}{c^3(b+a)}$$

Bài 11 (IMC 2016)**.** Cho n là số nguyên dương và $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ là các số thực sao cho $a_i + b_i > 0$ với $i = 1, 2, \ldots, n$. Chứng minh

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_ib_i - b_i^2}{a_i + b_i} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i - \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$$

Bài 12 (India International Mathematical Olympiad Training Camp)**.** Cho a, b, c, d là các số thực thỏa mãn $|a|, |b|, |c|, |d| > 1$ và $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0$$

Bài 13 (India Regional Mathematical Olympiad)**.** Cho a, b, c là các số thực dương sao cho $a + b + c = 3$. Tìm gía trị lớn nhất của

$$\frac{a}{a^3 + b^2 + c} + \frac{b}{b^3 + c^2 + a} + \frac{c}{c^3 + a^2 + b}$$

Bài 14 (India National Math Olympiad, Third Round)**.** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ và $abc = 1$. Chứng minh

$$\frac{a+b}{(a+b+1)^2} + \frac{b+c}{(b+c+1)^2} + \frac{c+a}{(c+a+1)^2} \geq \frac{2}{a+b+c}$$

Bài 15 (Iran Team Selection Test)**.** Cho a, b, c, d là các số thực dương sao cho

$$\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{1}{c+1} + \frac{1}{d+1} = 2.$$

Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{b^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{c^2+1}{2}} + \sqrt{\frac{d^2+1}{2}} \geq 3\left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d}\right) - 8$$

Bài 16 (JBMO Team Selection Test)**.** Chứng minh

$$(x^4 + y)(y^4 + z)(z^4 + x) \geq (x + y^2)(y + z^2)(z + x^2)$$

với các số thực dương x, y, z sao cho $xyz \geq 1$.

Bài 17 (JBMO)**.** Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh

$$\frac{8}{(a+b)^2 + 4abc} + \frac{8}{(b+c)^2 + 4abc} + \frac{8}{(a+c)^2 + 4abc} + a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{8}{a+3} + \frac{8}{b+3} + \frac{8}{c+3}$$

Bài 18 (JBMO Team Selection Test)**.** Cho $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, chứng minh

$$\frac{2a}{\sqrt{3a+b}} + \frac{2b}{\sqrt{3b+c}} + \frac{2c}{\sqrt{3c+a}} \leq \sqrt{3(a+b+c)}$$

Bài 19 (JBMO Team Selection Tests - Romania)**.** Cho $a, b, c > 0$ và $abc \geq 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{a^3 + 2b^3 + 6} + \frac{1}{b^3 + 2c^3 + 6} + \frac{1}{c^3 + 2a^3 + 6} \leq \frac{1}{3}.$$

Bài 20 (Junior Balkan Team Selection Tests - Romania)**.** Cho a, b, c là các số thực sao cho $a \geq b \geq 1 \geq c \geq 0$ và $a + b + c = 3$.

a) Chứng minh $2 \leq ab + bc + ca \leq 3$
b) Chứng minh

$$\frac{24}{a^3 + b^3 + c^3} + \frac{25}{ab + bc + ca} \geq 14$$

Bài 21 (Korea Winter Program Practice Test)**.** Cho $x, y, z \geq 0$ là các số thực sao cho

$$(x + y - 1)^2 + (y + z - 1)^2 + (z + x - 1)^2 = 27.$$

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của $x^4 + y^4 + z^4$

Bài 22 (Macedonian National Olympiad). Cho $n \geq 3$ và $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}^+$ sao cho

$$\frac{1}{1+a_1^4} + \frac{1}{1+a_2^4} + ... + \frac{1}{1+a_n^4} = 1.$$

Chứng minh rằng

$$a_1 a_2 ... a_n \geq (n-1)^{\frac{n}{4}}$$

Bài 23 (Mediterranean Mathematics Olympiad). Cho a, b, c là số thực dương sao cho $a + b + c = 3$. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{b}{a^2+3}} + \sqrt{\frac{c}{b^2+3}} + \sqrt{\frac{a}{c^2+3}} \leq \frac{3}{2}\sqrt[4]{\frac{1}{abc}}$$

Bài 24 (MEMO). Cho $n \geq 2$ là số nguyên dương và $x_1, x_2, \ldots, x_n$ là các số thực sao cho

a) $x_j > -1$ với $j = 1, 2, \ldots, n$ và
b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n$. Chứng minh

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+x_j} \geq \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{1+x_j^2}$$

Bài 25 (Pan-African Mathematical Olympiad). Cho x, y, z là các số thực dương sao cho $xyz = 1$. Chứng minh

$$\frac{1}{(x+1)^2+y^2+1} + \frac{1}{(y+1)^2+z^2+1} + \frac{1}{(z+1)^2+x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

Bài 26 (San Diego Mathematical Olympiad). Cho u, v, w là các số thực dương sao cho $u\sqrt{vw} + v\sqrt{wu} + w\sqrt{uv} \geq 1$. Tìm gía trị nhỏ nhất của $u + v + w$.

Bài 27 (Kiev Team Selection Test - UMO). Cho $a, b, c > 0$ sao cho $a + b + c = 3$, chứng minh

$$\frac{a^2}{a+b^2} + \frac{b^2}{b+c^2} + \frac{c^2}{c+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Bài 28 (Kiev Team Selection Test - UMO). Cho các số thực dương x, y, z. Chứng minh

$$\frac{x^2}{xy+z} + \frac{y^2}{yz+x} + \frac{z^2}{xz+y} \geq \frac{(x+y+z)^3}{3(x^2(y+1)+y^2(z+1)+z^2(x+1)}$$

Bài 29 (Taiwan Team Selection Test, Second Round). Cho $x, y > 0$ sao cho $x + y = 1$. Chứng minh

$$\frac{x}{x^2+y^3} + \frac{y}{x^3+y^2} \leq 2\left(\frac{x}{x+y^2} + \frac{y}{x^2+y}\right)$$

Bài 30 (Taiwan Team Selection Test, Third Round). Cho $x, y, z > 0$ sao cho $x + y + z = 1$. Tìm số nhỏ nhất k sao cho

$$\frac{x^2y^2}{1-z} + \frac{y^2z^2}{1-x} + \frac{z^2x^2}{1-y} \leq k - 3xyz$$

Bài 31 (EGMO Team Selection Test - Turkey). Với mọi $x, y, z > 0$. Chứng minh

$$x^4y + y^4z + z^4x + xyz(x^3+y^3+z^3) \geq (x+y+z)(3xyz-1)$$

Bài 32 (Turkey Team Selection Test)**.** Cho $a, b, c \geq 0$ sao cho $a^2 + b^2 + c^2 \leq 3$. Chứng minh

$$(a + b + c)(a + b + c - abc) \geq 2(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Bài 33 (Turkmenistan Regional Mathematical Olympiad)**.** Nếu a, b, c là độ dài ba canh của một tam giác. Chứng minh

$$\sqrt{\frac{a}{-a+b+c}} + \sqrt{\frac{b}{-b+c+a}} + \sqrt{\frac{c}{-c+a+b}} \geq 3$$

Bài 34 (India Regional Mathematical Olympiad)**.** Cho $a, b, c > 0$ sao cho

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c} = 1.$$

Chứng minh $abc \leq \frac{1}{8}$.

Bài 35 (Spain Mathematical Olympiad)**.** Cho $n \geq 2$ là số nguyên. Tìm giá trị nhỏ nhất của γ sao cho với mọi số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ với $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$ và $y_1 + y_2 + ... + y_n = 1$ với $0 \leq y_1, y_2, ..., y_n \leq \frac{1}{2}$ bất đẳng thức sau thỏa

$$x_1x_2...x_n \leq \gamma\left(x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n\right)$$