BẤT ĐẲNG THỨC THI THỬ KHTN ĐỢT 1 VÒNG 2 2016-2017

Hướng 1

$$\frac{1-a^2}{1+a^2}+\frac{1-b^2}{1+b^2}=\frac{2c[2ab+c(a+b)]}{(a+b)(b+c)(c+a)}\leq\frac{2c}{\sqrt{1+c^2}}$$

Thật vậytheo Cauchy-Schwarz, ta có

$$2ab+c(a+b)\leq(a+b)(c+\sqrt{ab})\leq(a+b)\sqrt{(b+c)(c+a)}$$

Vì thế bất đẳng thức là xong do ghép đối xứng.

Hướng 2

Rõ ràng bất đẳng đúng khi ta chứng minh được trong tam giác

$$cos(A)+cos(B)\leq 2sin\frac{C}{2}$$

Thật vậy

$$cos(A)+cos(B)=2cos\frac{A+B}{2}cos\frac{A-B}{2}\leq 2cos\frac{A+B}{2}=2sin\frac{C}{2}$$

Vì thế bất đẳng thức là xong do ghép đối xứng.

Hướng 3 ta có $ab+bc+ca=1$ nên

$$\sum_{cyc}\frac{1-a^2}{1+a^2}=\sum_{cyc}\frac{(1-a^2)(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\sum_{cyc}\frac{a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\sum_{cyc}\frac{a(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Áp dụng A-G thì

$$a(b+c)\sqrt{(a+b)(a+c)}\geq a(b+c)(a+\sqrt{bc})\geq a^2(b+c)+2abc$$

Vì thế bất đẳng thức là xong do ghép đối xứng.