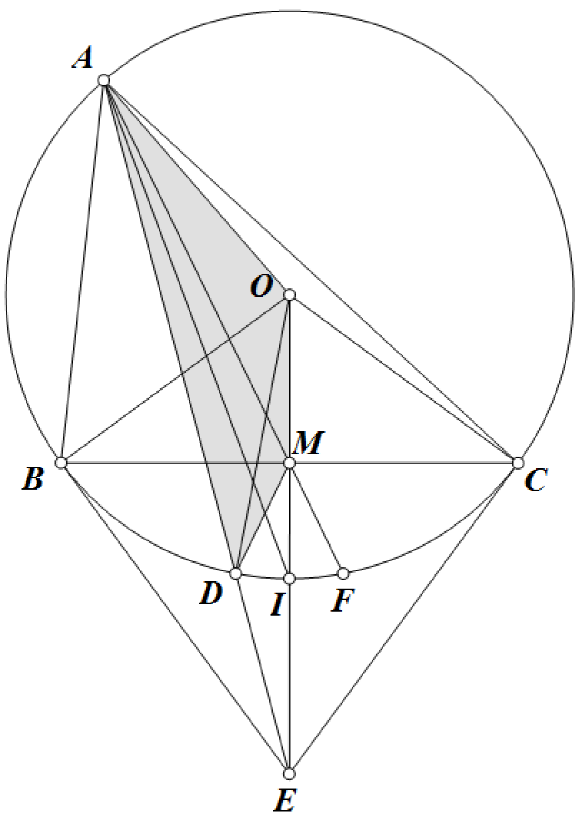
ĐƯỜNG SYMMEDIAN

Bài toán

[Đường Symemdian]
Cho tam giác ABC. Hai đường tiếp tuyến với đường tròn ngoại tiếp của nó tại B và C cắt nhau tại E. Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh rằng : $\widehat{BAE} = \widehat{MAC}$.

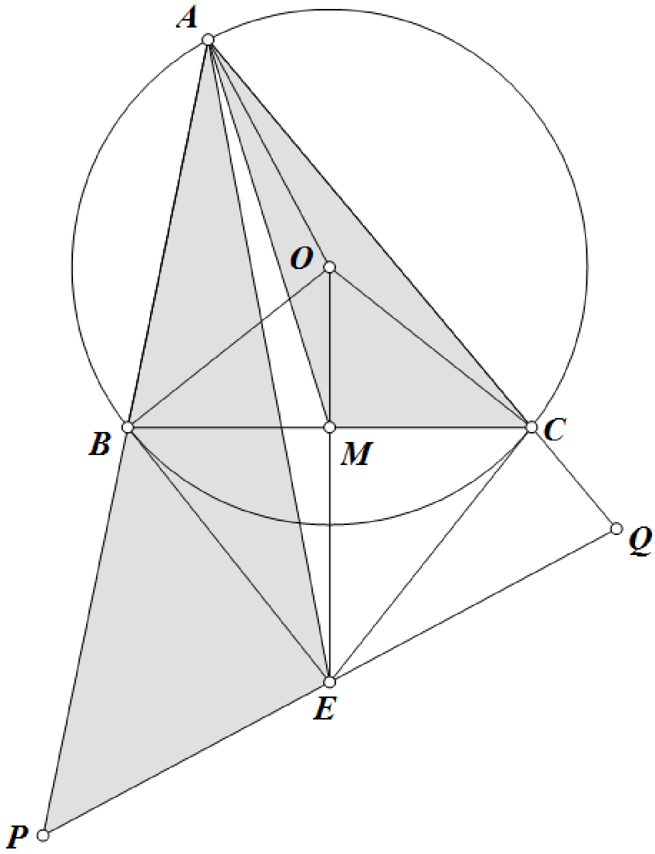
(Đường thẳng AE được gọi là đường symmedian của tam giác.)

Lời Giải 1:



Gọi $D = AE \cap (O), I = OM \cap (O), F = AM \cap (O)$
Ta có:
$EB^2 = ED.EA = EM.EO$ (Hệ thức lượng)
$\Rightarrow AOMD$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{DOI} = \widehat{DAF}$
Suy ra I là điểm chính giữa cung DF. Mà I là điểm chính giữa cung BC nên cung BD bằng cung CF. $\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{MAC}$. ❑

Lời giải 2:



Qua E kẻ đường thẳng song song với tiếp tuyến tại A của (O), đường thẳng này cắt AB, AC lần lượt tại P, Q. Ta dễ dàng chứng minh được:

- $BCQP$ nội tiếp
- E là trung điểm PQ.

Ta có:

$$\triangle ABC \sim \triangle AQP(g.g) \Rightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AP}{PQ} \Leftrightarrow \frac{AC}{2MC} = \frac{AP}{EP} \Leftrightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{AP}{PE}.$$

Từ đó suy ra : $\triangle MAC \sim \triangle EAP(c.g.c) \Leftrightarrow \widehat{BAE} = \widehat{MAC}$. ❑