Olympic gặp gỡ toán học 2017 khối 11

Phạm Quốc Sang

Cựu học sinh trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, tỉnh Quảng Nam

Phạm Hữu Hiệp

Cựu học sinh trường THPT Chuyên Tiền Giang, tỉnh Tiền Giang

Do thời gian gấp rút nên bài viết khó tránh khỏi những sai sót. Mong các bạn thông cảm và góp ý để bài viết được hoàn thiện hơn.

Bài 1

Cho ba số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx \leq 1$. Chứng minh rằng ta có bất đẳng thức

$$1 - xy - yz - xz \leq \left(6 - 2\sqrt{6}\right)(1 - \min\{x, y, z\}).$$

Lời giải. Giả sử: $z = min\,(x, y, z) \Rightarrow 1 - xy - yz - xz \leq 1 - 3z^2$.

Khi đó ta cần chứng minh

$$1 - 3z^2 \leqslant \left(6 - 2\sqrt{6}\right)(1 - z)$$
$$\Leftrightarrow 3z^2 - 2\left(3 - \sqrt{6}\right)z + 5 - 2\sqrt{6} \geqslant 0. \quad (*)$$

Xét tam thức bậc hai

$$f(z) = 3z^2 - 2\left(3 - \sqrt{6}\right)z + 5 - 2\sqrt{6}.$$

Ta có

$$\Delta_z{}' = \left(3 - \sqrt{6}\right)^2 - 3\left(5 - 2\sqrt{6}\right) = 0.$$

Nên hai nghiệm của tam thức

$$z_1 = z_2 = \frac{3 - \sqrt{6}}{3}.$$

Từ đó suy ra

$$f(z) = 3\left(z - \frac{3 - \sqrt{6}}{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

Vậy $(*)$ đã được chứng minh. ■

Bình luận. Đây là bài toán khá hay. Nhiều học sinh sẽ cảm thấy bài toán rất lạ khi trong bài xuất hiện $\min\{x, y, z\}$.

Tuy nhiên, giả thiết này chính là chìa khóa giúp học sinh đặt $z = \min(x, y, z)$. Từ đó đưa bài toán về việc chứng minh một tam thức bậc hai không âm.

Bài tập tương tự.

Cho ba số thực a, b, c. Chứng minh rằng

$$1 + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \left(2\sqrt{3} - 3\right)\left(2 + \min\left\{a + b, b + c, c + a\right\}\right).$$

(Phạm Quốc Sang)

Lời giải. Giả sử $a \geqslant b \geqslant c \Rightarrow b + c = \min\left\{a + b, b + c, c + a\right\}$.

Khi đó ta có

$$1 + a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1 + \frac{b^2 + c^2}{2} + b^2 + c^2 \geqslant 1 + \frac{1}{4}(b + c)^2 + \frac{1}{2}(b + c)^2 = 1 + \frac{3}{4}(b + c)^2.$$

Khi đó ta cần chứng minh

$$1 + \frac{3}{4}(b + c)^2 \geqslant \left(2\sqrt{3} - 3\right)(2 + b + c). \quad (1)$$

Đặt $t = b + c$ thì (1) trở thành

$$1 + \frac{3}{4}t^2 \geqslant \left(2\sqrt{3} - 3\right)(2 + t)$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}t^2 - \left(2\sqrt{3} - 3\right)t + 7 - 4\sqrt{3} \geqslant 0.$$

Xét $f(t) = \frac{3}{4}t^2 - \left(2\sqrt{3} - 3\right)t + 7 - 4\sqrt{3}$.

Ta có $\Delta_t = \left(2\sqrt{3} - 3\right)^2 - 3\left(7 - 4\sqrt{3}\right) = 0$.

Nên $t_1 = t_2 = \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}$ là hai nghiệm của $f(t)$.

Do đó

$$f(t) = \frac{3}{4}\left(t - \frac{4\sqrt{3} - 6}{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3}$. ■

Bài 2

Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Lời giải. $f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y)$ $(*)$

Cho $x = 0$ khi đó $(*)$ trở thành

$$2f(0) - f(0)f(y) + yf(0) \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Thay $y = x$ vào (1) ta được

$$f(0)f(x) = -f(0)x + 2f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (2)$$

TH1. $f(0) \neq 0$ ta chia hai vế của (2) cho $f(0)$ ta được

$$f(x) = -x + 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Thay $f(x) = -x + 2$ vào $(*)$ ta thấy $f(x) = -x + 2$ không thỏa.

TH2. $f(0) = 0$.

Thay $y = 0$ vào $(*)$ ta được

$$f(x^2) = xf(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (3).$$

Thay x bởi $-x$ vào (3) ta được

$$xf(x) = f(x^2) = f((-x)^2) = -xf(-x)$$

Do đó

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Thay $y = -x$ vào $(*)$ ta được

$$\begin{aligned} & f\left(x^2\right) + f\left(-x^2\right) = f\left(x\right) f\left(-x\right) - xf\left(x\right) \\ \Leftrightarrow\ & xf\left(x\right) - xf\left(x\right) = -f^2\left(x\right) - xf\left(x\right) \\ \Leftrightarrow\ & f\left(x\right)\left(f\left(x\right) + x\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left[\begin{array}{l} f\left(x\right) = 0 \\ f\left(x\right) = -x \end{array}\right. \end{aligned}$$

Thử lại ta thấy $f(x) = 0$ và $f(x) = -x$ thỏa $(*)$. ■

Bình luận. Bài phương trình hàm khá đơn giản. Học sinh chỉ cần thay một vài giá trị đặc biệt thì sẽ nhận ra rằng hàm f là hàm lẻ trên $\mathbb{R}$. Từ đó ta dễ dàng đi đến đáp số bài toán.

Bài tập tương tự.

Tìm tất cả hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ thỏa điều kiện

$$f(xy) - xf(x+y) + f(y) + 1 = f(-x^2) + f(x)f(y) + xf(y) + f(x).$$

(Phạm Quốc Sang)

Bài 3

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n, tồn tại số nguyên x sao cho $x^3 + 2017$ chia hết cho 3^n nhưng không chia hết cho 3^{n+1}.

Lời giải. Hiện mình chưa giải ra bài này.

Nếu các bạn hoặc thầy cô nào giải được xin chia sẽ cho chúng tôi tham khao để hoàn thiện thêm bài viết.

Xin chân thành cảm ơn.

Các bạn, các thầy cô có thể gửi bài qua địa chỉ mail sau:

phamquocsang1995@gmail.com ■

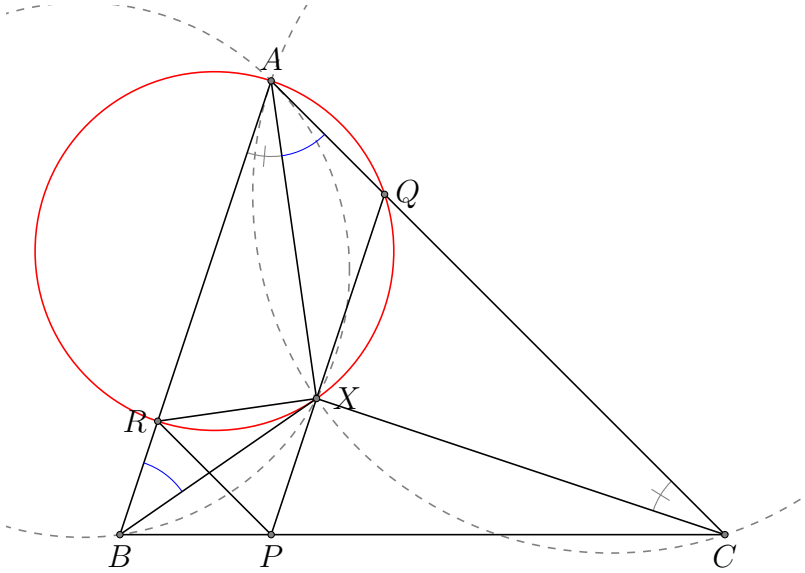
Bài 4

Cho tam giác ABC. Điểm P di động trên cạnh BC. Trên AC, AB lần lượt lấy các điểm Q, R sao cho $PQ//AB, PR//AC$.

a) Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác AQR luôn đi qua một điểm cố định $X \neq A$ Khi P di động trên BC.

b) Kéo dài AX cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại điểm thứ hai K. Chứng minh rằng X là trung điểm AK.

Lời giải. a)



Gọi giao điểm của đường tròn $(\mathscr{C}_1)$ qua A, B tiếp xúc với AC cắt đường tròn $(\mathscr{C}_2)$ qua A, C tiếp xúc với AB tại X.

Xét ΔBXA và ΔAXC có

$$\widehat{ABX} = \widehat{CAX}, \text{ (cùng chắn } \widehat{AX} \text{ của đường tròn } (\mathscr{C}_1));$$
$$\widehat{BAX} = \widehat{ACX}, \text{ (cùng chắn } \widehat{AX} \text{ của đường tròn } (\mathscr{C}_2)).$$

Suy ra

$$\Delta BXA \backsim \Delta AXC, (g-g).$$

Suy ra

$$\frac{BX}{AX} = \frac{AB}{AC}. \tag{1}$$

Mặt khác, do $PQ \parallel AB$ và $PR \parallel AC$ nên

$$\frac{RB}{AB} = \frac{BP}{BC} = \frac{AQ}{AC}.$$

Suy ra

$$\frac{RB}{AQ} = \frac{AB}{AC}. \tag{2}$$

Từ (**??**) và (**??**) suy ra

$$\frac{RB}{AQ} = \frac{BX}{AX}.$$

Hơn nữa

$$\widehat{ABX} = \widehat{CAX}, \text{ (cùng chắn } \widehat{AX} \text{ của đường tròn } (\mathscr{C}_1)).$$

Do đó

$$\Delta BRX \backsim \Delta AQX, (c-g-c).$$

Suy ra

$$\widehat{RXQ} = \widehat{AXB} = 180^\circ - \widehat{RAQ}.$$

Suy ra tứ giác $AQXR$ nội tiếp.

b) Gọi tiếp tuyến tại B, C của O, (với O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) giao nhau tại S.

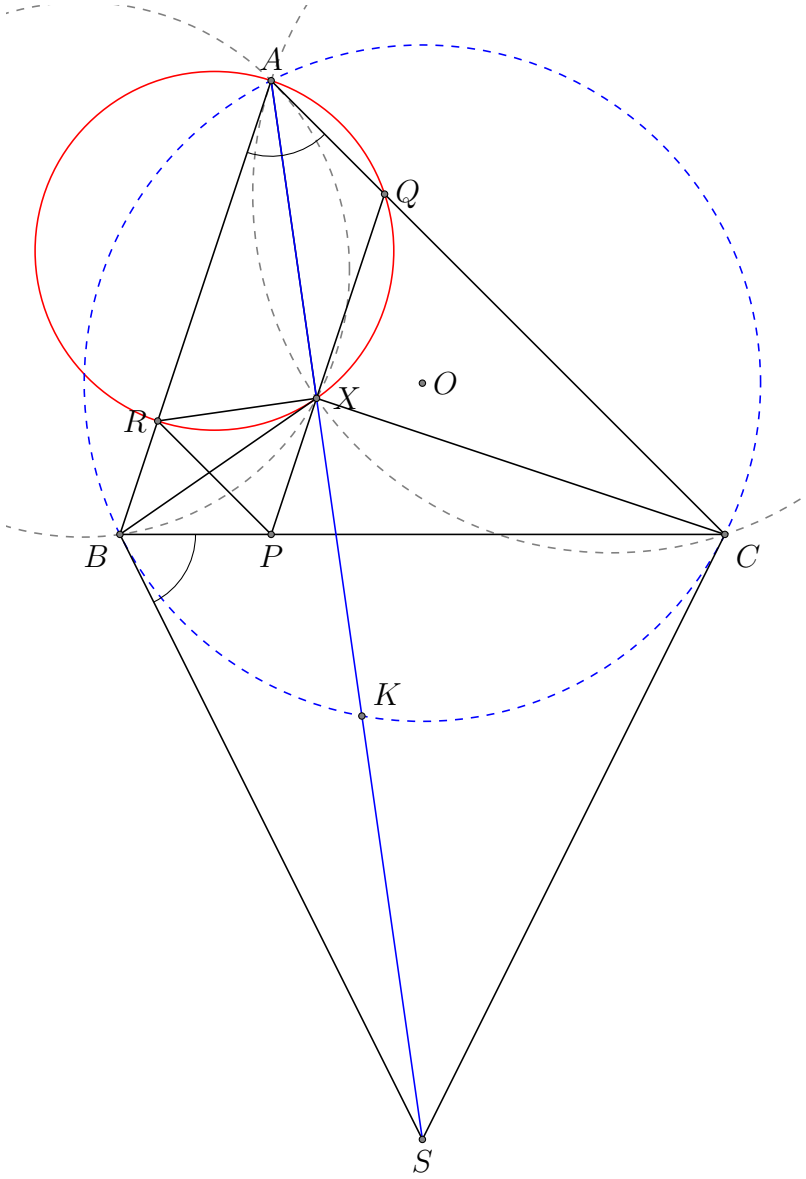
Ta có

$$\begin{aligned}\widehat{BXC} = \widehat{BXK} + \widehat{KXC} &= \widehat{XAB} + \widehat{XBA} + \widehat{XAC} + \widehat{ACX} \\ &= \widehat{XAB} + \widehat{XAC} + \widehat{XAC} + \widehat{BAX} \\ &= 2\widehat{BAC} = 2\widehat{SBC}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$\widehat{BXC} + \widehat{BSC} = 2\widehat{SBC} + \widehat{BSC} = 180^\circ.$$

Do đó tứ giác $BXCS$ nội tiếp đường tròn.



Mặt khác, tứ giác $OBSC$ cũng nội tiếp đường tròn.

Như vậy, năm điểm O, X, B, S, C cùng thuộc đường tròn.

Ta lại có $OS \perp BC$, (tính chất tiếp tuyến) nên S là điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn ngoại tiếp năm điểm O, X, B, S, C.

Mặt khác $\widehat{BXK} = \widehat{CXK} \left(= \widehat{BAC}\right)$ nên XK đi qua điểm chính giữa cung lớn BC của đường tròn ngoại tiếp năm điểm O, X, B, S, C, tức là S. Vậy A, X, K, S thẳng hàng.

Suy ra

$$\widehat{OXS} = \widehat{OBS} = 90^\circ.$$

Vậy X là trung điểm của cung AK.

■

Nguồn tham khảo

1. diendantoanhoc.net

2. https://www.facebook.com/groups/Loicenter/permalink/1560806647325837/