CÂN BẰNG NASH TRONG LÍ THUYẾT TRÒ CHƠI: ỨNG DỤNG ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG

LƯU GIANG NAM[1,2,3]

TÓM TẮT NỘI DUNG: Bài viết sẽ giới thiệu về Lý thuyết trò chơi và đặc biệt là Định lý cân bằng Nash (Nash Equilibrium) và ứng dụng của hai định lí điểm bất động là Định lí Kakutani và Brouwer để chứng minh sự tồn tại của cân bằng Nash. Định lí Kakutani là dạng tổng quát cho Định lí Brouwer vì có thể dùng cho các phép tương ứng (correspondence) và cho trò chơi vô hạn thay vì chỉ là hàm số (function) và trò chơi hữu hạn của Brouwer. Do giới hạn nội dung bài viết nên ở phần trò chơi vô hạn chỉ xét trường hợp đơn giản nhất, các nội dung khác có thể tham khảo thêm tại quyển Advanced Fixed Point Theory for Economics của Andrew McLennan, [8].

Bài viết bao gồm 4 phần: Phần 1 nói về các định nghĩa cơ bản của Lý thuyết trò chơi (Game Theory); Phần 2 nói về sự xuất hiện của Cân bằng Nash; Phần 3 và 4 sẽ là ứng dụng của Định lí điểm bất động Brouwer và Kakutani. Tài liệu tham khảo chính của bài viết là loạt series các bài giảng về Lý thuyết trò chơi với ứng dụng trong kỹ thuật [3] và bài giảng Optimization Methods in Finance của Giáo sư Friedrich Eisenbrand [9] và một số tài liệu khác có đề cập và đính kèm link pdf của từng tài liệu.

1 LÍ THUYẾT TRÒ CHƠI

1.1 Giới thiệu Lý thuyết trò chơi

Trong nhiều trường hợp hệ thống xã hội và kỹ thuật, có nhiều nhân tố (agent) tạo ra đa dạng sự lựa chọn. Trong tất cả trường hợp trên, sự ảnh hưởng của những nhân tố và sự đa dạng trong cách lựa chọn tạo ra được Lý thuyết lựa chọn phụ thuộc vào các nhân tố (Multiagent Decision Theory) hay được biết đến với tên gọi Lý thuyết trò chơi.

MÔ HÌNH: Với n nhân tố, mỗi phép chọn $x_i \in \mathbb{R}$ và một hàm thảo dụng (Utility function) $u_i(x), x \in \mathbb{R}^n$ có dạng:

$$u_i(x_i, x_{-i}), \quad x_{-i} = (x_1, x_2, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \tag{1}$$

LÝ THUYẾT TRÒ CHƠI ĐẢO : Một lý thuyết được xây dựng nên để đạt được kết quả cuối cùng như mong muốn được gọi là Inverse game Theory -Lý thuyết trò chơi đảo. Trong Kỹ thuật còn được biết đến với tên gọi Mechanism Design.

1 Khoa Toán - Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên, TP Hồ Chí Minh
2 Email: luugiangnam96@gmail.com
3 Mã số sinh viên: 1411174

Lý thuyết Trò chơi có thể được sử dụng hữu ích vào kinh tế như sau: Trong những tình huống nhất định, mỗi cá nhân sẽ có những hành động có lý theo nghĩa sẽ chọn ra một sự lựa chọn cái sẽ đem lại cho họ kết cục - payoff, ở đây có nghĩa lợi nhuận.

Chúng ta thường chỉ cần thông tin theo thứ tự (ordinal information) tức là với hai sự lựa chọn a và b, khi đó hình dung về một mối liên hệ ưu tiên $\succeq$ cái sẽ thể hiện loại của những sự lựa chọn khác nhau. Chúng ta thường kiểm tra rằng $a \succeq b$ hay $a \preceq b$.

Tuy nhiên, trong lý thuyết trò chơi, thường chỉ có dạng thông tin cơ bản (cardinal information) bởi vì những quyết định được đưa ra dưới độ bất định tự nhiên và theo chiến lược cụ thể. Lý thuyết về sự đưa ra quyết định dưới độ bất định - The theory of decision making under uncertainty - được phát triển đầu tiên bởi John von Neumann và Oskar Morgenstern, tham khỏa thêm tại [10].

1.2 Lý thuyết về ra quyết định dưới độ bất định(Decision - Making under Uncertainty)

John von Neumann và Oskar Morgenstern thừa nhận một số tiên đề được gọi là "tiên đề hợp lí" ("reasonable axioms") cái sẽ giúp cho lý thuyết của Neumann và Morgenstern đúng.

Từ đây họ phát sinh ra một lý thuyết là Lý thuyết độ thỏa dụng kì vong ("Expected utility theory") là lý thuyết nói về các hành vi cá nhân trong điều kiện không chắc chắn, mô tả logic rằng mọi người có thể đưa ra quyết định như thế nào trong một thế giới không chắc chắn. Phần chính của thuyết này cho thấy rằng một cá nhân có những sở thích thoả mãn một số định đề (thường là về trật tự, tiếp tục và dộc lập) sẽ lựa chọn để tối đa hoá độ thoả dụng dự tính. Tham khảo thêm tại Wikipedia: Expected utility hypothesis, [6].

Dưới độ bất định đó, mọi cách chọn đều có một độ may rủi. Lý thuyết độ thỏa dụng kì vong của Neumann và Morgenstern chứng minh rằng tồn tại hàm số thỏa dụng (utility function, hay còn được gọi kèm với tên của nhà toán học người Thụy Sĩ Bernoulli là Bernoulli utility function) u_i.

Khi đó một cách chọn a dẫn đến một phân phối xác suất $F^a(c)$. Từ đó, độ thỏa dụng của cách chọn này được cho bởi công thức:

$$U(a) = \int u(c)dF^a(c) \tag{2}$$

hay nói cách khác đây chính là một kỳ vọng của $u(c)$ dựa vào $F^a(c)$. Nếu $F^a(c)$ là một phân phối liên tục với mật độ (density) $f^a(c)$ thì ta có:

$$U(a) = \int u(c)f^a(c)dc \tag{3}$$

Nếu $F^a(c)$ là phân phối rời rạc thì khi đó ta có c_i có xác suất p_i^a, $\sum^i p_i^a u(c_i) = 1$ và ta có:

$$U(a) = \sum_i p_i^a u(c_i) \tag{4}$$

Nếu chỉ có 2 nhân tố a và b với phân phối xác suất lân lượt là $F^a(c)$ và $F^b(c)$, khi đó cách chọn a của một cá thể được ưu tiên hơn b của người đó nếu:

$$U(a) = \int u(c)dF^a(c) \geqslant U(b) = \int u(c)dF^b(c) \tag{5}$$

Mở rộng hơn, ta có thể xét bài toán quyết định của một nhóm người bằng cách khảo sát riêng từng người một cùng một lúc và đọc lập giữa mỗi người.

1.3 Trò chơi dạng chiến lược - Strategic form game.

Trò chơi dạng chiến lược hay trong hữu hạn được biết đến với tên gọi matrix game là trò chơi mà chúng ta bắt đầu tất cả hành động điều diễn ra cùng một lúc và độc lập với nhau. Mỗi trò chơi sẽ phải định nghĩa: Tập người chơi (The set of players), Chiến lược (Strategies) và Kết cục (payoffs).

Nói một cách chuẩn hơn, toán học hơn thì ta có định nghĩa:

TRÒ CHƠI DẠNG CHIẾN LƯỢC: Một trò chơi dạng chiến lược bao gồm ba khái niệm $(\mathfrak{I}, (S_i)_{i\in\mathfrak{I}}, (u_i)_{i\in\mathfrak{I}})$ thỏa:

- $\mathfrak{I}$ là một tập hữu hạn những người chơi, tức là $\mathfrak{I} = \{1, 2, ..., I\}$
- S_i là tập của những hành động có giá trị (available actions) của người chơi thứ i.
- $s_i \in S_i$ là một hành động của người chơi thứ i.
- $u_i : S \to R$ là một hàm kết cục thỏa dụng (payoff utility function) của người chơi thứ i với $S = \Pi_i S_i$ là tập của tất cả hành động của mọi người.

Thêm vào đó ta sẽ định nghĩa và sử dụng những kí hiệu sau:

- $s_{-i} = [s_j]_{j\neq i}$: vector của hành động của người chơi trừ người thứ i.
- $S_{-i} = \Pi_{j\neq i} S_j$ là tập của tất cả hành động của mọi người, trừ người thứ i.
- (s_i, s_{-i}) là một hệ thống chiến lượt (a Strategic Profile).

Có nhiều chiến lượt trong thực tế như: Matching Pennies, Cournot competition, Prisoner's Dilemma,... Tuy nhiên ta có thể nhóm lại thành 2 nhóm không gian để xét mỗi chiến lượt là: Không gian chiến lượt hữu hạn và vô hạn (Finite/Infinite Strategy Spaces):

KHÔNG GIAN CHIẾN LƯỢT HỮU HẠN: Là Không gian chiến lượt mà Khi đó S_i hữu hạn với mọi i, ngoài ra ta còn gọi đây là trò chơi hữu hạn lần hay Trò chơi dạng ma trận - Game Matrix(vì khi đó ta có thể kiểm soát kết quả bằng việc sắp các hành động và lần lập thành cột và hàng tương ứng).

KHÔNG GIAN CHIẾN LƯỢT VÔ HẠN: Khi đó sẽ có i để S_i vô hạn.

PHÉP PHẢN HỒI TƯƠNG ỨNG TỐT NHẤT: Phép tương ứng phản hồi tốt nhất (best response correspondence) cho mỗi i là ánh xạ: $B_i(s_{-i}) = \arg\max_{s_i\in S_i} u_i(s_i, s_{-i})$.

Bắt đầu từ phần sau, bài viết sẽ tập trung vào Chiến lượt Cân bằng áp đảo (Dominant Strategy Equilibrium), Chiến lượt Cân bằng hổn hợp (Mixed Strategy Equilibrium) và đặc biệt là Cân bằng Nash (Nash Equilibrium).

2 ĐỊNH LÍ ĐIỂM CÂN BẰNG CỦA NASH

Ta sẽ bắt đầu bằng những định nghĩa của Cân bằng áp đảo (Dominant Strategy Equilibrium). Đây là một cân bằng mà trong đó mỗi người chơi đều sử dụng chiến lược áp đảo của mình. Nói theo toán học thì:

CHIẾN LƯỢT ÁP ĐẢO: Một chiến lượt $s_i \in S_i$ là áp đảo cho người chơi thứ i nếu:

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}),\ \forall s_i' \in S_i,\ \forall s_{-i} \in S_{-i} \tag{6}$$

CHIẾN LƯỢT CÂN BẰNG ÁP ĐẢO: Một hệ thống chiến lượt s^* là chiến lượt cân bằng áp đảo nếu với mỗi người chơi i, s_i^* là một chiến lượt áp đảo.

CHIẾN LƯỢT ÁP ĐẢO NGẶT: Một chiến lượt $s_i \in S_i$ là áp đảo ngặt cho người chơi thứ i nếu tồn tại những $s_i' \in S_i$ thỏa mãn:

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}),\ \forall s_i' \in S_i,\ \forall s_{-i} \in S_{-i} \tag{7}$$

CHIẾN LƯỢT ÁP ĐẢO YẾU: Một chiến lượt $s_i \in S_i$ là áp đảo yếu cho người chơi thứ i nếu tồn tại những $s_i' \in S_i$ thỏa mãn:

$$u_i(s_i', s_{-i}) \geqslant u_i(s_i', s_{-i}),\ \forall s_i' \in S_i,\ \forall s_{-i} \in S_{-i} \tag{8}$$

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i}),\ \forall s_i' \in S_i,\ \text{với một số } s_{-i} \in S_{-i} \tag{9}$$

Trong những trường hợp phức tạp, những phương pháp Chiến lượt áp đảo ngặt và Chiến lượt áp đảo yếu đề không thể giải quyết được. Khi đó nhu cầu cần tìm ra hướng giải quyết cho những trường hợp đó, John Nash đã đề xuất một ý tưởng giải quyết và thực hiện thành công. Sau này John von Neumann và Oskar Morgenstern đã phát biểu ra lý thuyết về Cân bằng Nash (Nash Equilibrium) vào năm 1944 trong quyển sách The Theory of Games and Economic Behavior và đến năm 1951 John von Neumann đã sử dụng "Brouwer fixed point theorem" để hoàn thiện chứng minh về sự tồn tại của lý thuyết. Sau đây là nội dung của lý thuyết Cân bằng Nash:

CÂN BẰNG NASH: Một chiến lượt thuần túy Cân bằng Nash của một trò chơi mang tính chiến lượt $\langle \mathfrak{I}, (S_i)_{i\in\mathfrak{I}}, (u_i)_{i\in\mathfrak{I}} \rangle$ là một hệ thống chiến lượt $s^* \in S$ thỏa mãn rằng với mỗi $i \in \mathfrak{I}$:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}^*),\quad \forall s_i \in S_i \tag{10}$$

Ngoài ra còn một loại Cân bằng Nash khác chính là Chiến lượt hỗn hợp Cân bằng Nash (Mixed Strategy Nash Equilibrium)

CHIẾN LƯỢT HỖN HỢP: Kí hiệu $\sum_i$ là tập của những độ đo xác suất trên tập chiến lượt thuần túy S_i, $\sigma_i \in \sum_i$ kí hiệu là chiến lượt hỗn hợp của người chơi i và $\sigma \in \sum = \Pi_{i\in\mathfrak{I}} \sum_i$ kí hiệu là hệ thống chiến lượt hỗn hợp.

Với lưu ý là những người chơi được chọn độc lập ngẫu nhiên, khi đó ta có hàm kết cục - payoff function u_i từ S vào $\sum$ là:

$$u_i(\sigma) = \int_S u_i(s) d\sigma(s) \tag{11}$$

CÂN BẰNG NASH HỖN HỢP: Một hệ thống chiến lượt hỗn hợp σ^* là một Chiến lượt hỗn hợp Cân bằng Nash nếu với mỗi người chơi i ta có:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*),\quad \forall \sigma_i \in \Sigma_i \tag{12}$$

MỆNH ĐỀ 1: Một hệ thống chiến lượt hỗn hợp σ^* là chiến lượt cân bằng Nash hỗn hợp nếu và chỉ nếu với mỗi người chơi i ta có:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(s_i, \sigma_{-i}^*),\ \forall s_i \in S_i \tag{13}$$

Với những định nghĩa trên, ta cần phải chứng minh về sự tồn tại của γ^* để chứng tỏ sự tồn tại của Định lý Cân bằng Nash. Hai phần tiếp theo sẽ sử dụng công cụ là định lý Brouwer và Kakuatni để chứng minh trong một số trường hợp đơn giản của Cân bằng Nash.

3 ỨNG DỤNG CỦA ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG BROUWER

3.1 Định lý Brouwer

ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG BROUWER: Đặt $S \in \mathbb{R}^n$ là một tập lồi và compact. Nếu $f : S \to S$ là một hàm liên tục, khi đó có một điểm bất động, tức là có $s^* \in S$ sao cho $f(s^*) = s^*$.

3.2 Ứng dụng

Bài toán chỉ xét trong trường hợp 2 người chơi trong hưu hạn lần vì có thể tổng quát lên hữu hạn người. Trước hết sẽ chuyển những thuật ngữ về dạng ma trận.

Ta gọi $A \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}^{m\times n}$ và $B \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}^{m\times n}$ lần lượt là kết quả của người chơi thứ nhất và người chơi thứ 2 và $X \in \mathbb{R}^m$ và $Y \in \mathbb{R}^m$ lần lượt là chiến thuật hỗn hợp của từng người. Khi đó ta có:

$$u_1(s_1, s_{-1}) = X^T AY \tag{14}$$

và

$$u_2(s_2, s_{-2}) = X^T BY \tag{15}$$

Khi đó cân bằng Nash thành:

CÂN BẰNG NASH: Một cân bằng Nash là một cặp chiến lược hổn hợp X, Y thỏa mãn:

$$X^T AY \geqslant X'^T AY \tag{16}$$

và

$$X^T BY \geqslant X^T BY' \tag{17}$$

với X' và Y' lần lượt là bất cứ chiến lượt hổn hợp nào của người thứ nhất và người thứ 2.

ĐỊNH LÝ: Mọi trò chơi 2 người như trên đều có một Cân bằng Nash.

Chứng minh. Định nghĩa

$$r_i(X, Y) = \max\{0,\ e_i^T AY - X^T AY\}$$

và

$$c_i(X, Y) = \max\{0,\ X^T Be_j - X^T BY\}$$

với e_i và e_j lầ lượt là vector đơn vị (bằng 0 tại mọi điểm trừ tại i và j lần lượt sẽ bằng 1).

Chú ý rằng nếu X, Y là cân bằng Nash thì tương đương

$$\forall i = \overline{1, m},\ r_i(X, Y) = 0 \text{ và } \forall j = \overline{1, n},\ c_j(X, Y) = 0 \tag{18}$$

Khi đó ta định nghĩa hai chiến lượt mới $X',\ Y'$ theo X và Y như sau:

$$X_i' = \frac{X_i + r_i}{1 + \sum_{k=1}^m r_k}$$

$$Y_i' = \frac{Y_i + c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k}$$

với $r_k,\ c_k$ lần lượt là viết tắt của $r_k(X, Y)$ và $c_k(X, Y)$.

Ta kiểm tra được $X' \geqslant 0$, $Y' \geqslant 0$ và

$$\sum_{i=1}^m X_i' = \frac{\sum_{i=1}^m X_i + \sum_{i=1}^m r_i}{1 + \sum_{k=1}^m r_k} = 1 \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^m Y_j' = \frac{\sum_{j=1}^m Y_j + \sum_{i=1}^m c_i}{1 + \sum_{k=1}^m c_k} = 1 \tag{20}$$

Xét ánh xạ $T(X, Y) = (X', Y')$ và $S = (X, Y) \in \mathbb{R}^{m+n}$ là một tập lồi và compact.

Dễ có T liên tục, khi đó theo định lý điểm bất động Brouwer ta có:

$$(X^*, Y^*) \in S : T(X^*, Y^*) = (X^*, Y^*)$$

Đặt $u^* = X^{*T} AY^*$. Ta sẽ chứng minh $\sum_{k=1}^m r_k(X^*, Y^*) = 0$.

Giả sử điều trên sai, tức là: $\sum_{k=1}^{m} r_k(X^*, Y^*) > 0$.

Vì (X^*, Y^*) là một điểm bất động của T nên ta có:

$$X_i^* = \frac{X_i^* + r_i(X^*, Y^*)}{1 + \sum_{k=1}^{m} c_k(X^*, Y^*)}$$

$$\Leftrightarrow X_i^* \left(\sum_{k=1}^{m} c_k(X^*, Y^*) \right) = r_i(X^*, Y^*)$$

Do đó nếu $X_i^* = 0$ với bất cứ i nào thì $r_i(X^*, Y^*) = 0$.

Đặt $I = \{i : X_i^* > 0\}$. Ta có $I \neq \emptyset$ vì $\sum_i X_i^* = 1$. Khi đó ta có: $I \subset \{i : r_i(X^*, Y^*) > 0\}$. Và cũng từ định nghĩa của I ta có:

$$\sum_{i=1}^{m} X_i^* = \sum_{i \in I} X_i^* = 1$$

Với bất cứ $i \in I$ ta có $r_i(X^*, Y^*) > 0$ khi đó theo định nghĩa ta có:

$$e_i^T AY^* > X^{*T} AY^* \Leftrightarrow A_i Y^* > X^{*T} AY^*$$

với A_i là vector cột i của ma trận A.

Nhân cả hai vế với X_i^* rồi lấy tổng trên I ta có:

$$u^* = \sum_{i=1}^{m} X_i^* A_i Y^* > \sum_{i \in I} X_i^* X^{*T} A_i Y^* = \left(\sum_{i \in I} X_i^* \right) u^* = u^*$$

Vậy ta có điều mâu thuẫn, hay

$$\sum_{k=1}^{m} r_k(X^*, Y^*) = 0$$

Từ đó ta có $r_i(X^*, Y^*) = 0,\ \forall i = 1, ..., m$ hay với mọi $i \in \overline{1, m}$ ta có: $A_i Y^* \leqslant u^*$. Khi đó với mọi chiến lược $X' \in \mathbb{R}^m$ ta có:

$$X'^T AY^* = \sum_i X_i' A_i Y^* \leqslant \left(\sum_j X_i' \right) u^* = u^* = X^* AY^*$$

Bằng cách tương tự ta cũng có kết quả $c_i(X, Y) = 0$. Khi đó với mọi chiến lược $Y' \in \mathbb{R}^n$ ta có:

$$X^T AY' = \sum_j X^T A_j Y_j' \leqslant u^* \left(\sum_j Y_j' \right) = u^* = X^* AY^*$$

Vậy (X^*, Y^*) là cân bằng Nash cần tìm.

$\square$

4 ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG KAKUTANI

4.1 Định lý điểm bất động Kakutani

Đặt A là một tập con không rỗng của một không gian Euclide hữu hạn chiều. Đặt $f : \rightarrow A$ là một phép tương ứng (correspondence) với $x \in A \mapsto f(x) \subseteq A$ thỏa mãn những tính chất sau:

- A là một tập lồi compact.

- Tập các giá trị $f(x)$ không rỗng với mọi $x \in A$.
- $f(x)$ là một tương ứng lồi tức: $\forall x \in A,\ f(x)$ là một tập lồi.
- $f(x)$ là một đồ thị đóng (closed graph), tức là nếu $\{x^n, y^n\} \to \{x, y\}$ với $y^n \in f(x^n)$ khi đó $y \in f(x)$.

Khi đó f là một điểm bất động (fixed-point), tức là tồn tại $x \in A$ thỏa $x \in f(x)$.

Vì định lý Kakutani được chứng minh khá phức tạp cùng nhiều khái niệm mới nên trong khuôn khổ bài viết này sẽ không đề cập đến cách chứng minh. Tham khảo cách chứng minh tại [8]

4.2 Ứng dụng

4.2.1 *Sự tồn tại của định lí Nash trong bài toán hữu hạn*

Với Định lý điểm bất động Kakutani ta có thể chứng minh được đinh lí Nash trong trường hợp tổng quát của trò chơi hữu hạn như sau:

NASH'S THEOREM: Mọi trò chơi hữu hạn lần đều có một chiến lược cân bằng Nash hỗn hợp.

Chứng minh. Nhắc lại rằng σ^* là một hệ thống chiến lược cân bằng Nash hỗn hợp, khi đó mỗi người chơi i ta sẽ có:

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}^*),\ \forall \sigma_i \in \Sigma_i \tag{21}$$

Phép tương ứng phản hồi tốt nhất cho mỗi người chơi i là: $B_i : \Sigma_{-i} \to \Sigma_i$ thỏa:

$$B_i(\sigma_{-i}) = \{\sigma_i' \in \Sigma_i | u_i(\sigma_i',)\sigma_{-i} \geqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}),\ \forall \sigma_i \in \Sigma_i\} \tag{22}$$

Khi đó tập những phép phản hồi tương ứng tốt nhất $B_i(\sigma_{-i})$ được đặt là:

$$B(\sigma) = [B_i(\sigma_{-i})]_{i \in \mathfrak{I}}$$

Ý tưởng để chứng minh là áp dụng định lí điểm bất động Kakutani vào phép tương ứng $B : \Sigma \to \Sigma$ như đã định nghĩa trên. Trước mắt ta sẽ chứng minh các điều kiện để áp dụng:

- Σ compact, lồi và không rỗng.

  Bằng định nghĩa ta có:
  $$\Sigma = \prod_{i \in \mathfrak{I}} \Sigma_i$$
  với mỗi $\Sigma_i = \{x | \Sigma_j x_j = 1\}$ là một không gian hữu hạn chiều với số chiều $|S_i| - 1$, do đó Σ_i đóng và bị chặn, khi đó dẫn đến compact. Mà tích của những tập compact là một tập compact.

- $B(\sigma)$ không rỗng.
  Trước hết phát biểu định lý Weirstrass: Nếu A là tập con không rỗng, compact trong không gian Euclide hữu hạn chiều và f là một hàm liên tục, khi đó có x để $f(x) = \max_x f(x)$ Bằng định nghĩa ta có:
  $$B_i(\sigma_{-i}) = \arg\max_{x \in \Sigma_i} u_i(x, \sigma_{-i}) \tag{23}$$
  với Σ_i là một tập không rỗng, compact và u_i tuyến tính theo x. Khi đó u_i là liên tục và theo định lý Weirstrass $B(\sigma)$ không rỗng.

- $B(\sigma)$ là một tương ứng lồi.

  Một cách tương ứng, ta có $B(\sigma) \subset \Sigma$ lồi nếu và chỉ nếu $B_i(\sigma_{-i})$ lồi với mọi i.

  Để chứng minh ta đặt $\sigma_i', \ \sigma_i'' \in B_i(\sigma_{-i})$ ta có:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\tau_i, \sigma_{-i}), \ \forall \tau_i \in \Sigma_i \tag{24}$$

$$u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\tau_i, \sigma_{-i}), \ \forall \tau_i \in \Sigma_i \tag{25}$$

  Khi đó với mọi $\lambda \in [0, 1]$ ta có:

$$\lambda u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) + (1-\lambda) u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) \geqslant u_i(\tau_i, \sigma_{-i}), \ \forall \tau_i \in \Sigma_i \tag{26}$$

  Do đó ta có: $\lambda u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) + (1-\lambda) u_i(\sigma_i'', \sigma_{-i}) \in B_i(\sigma_{-i})$ Sử dụng tính tuyến tính theo biến đầu tiên của u_i ta có:

$$u_i(\lambda \sigma_i' + (1-\lambda)\sigma_i'', \sigma_{-i}) \in B_i(\sigma_{-i}) \tag{27}$$

  Khi đó ta có $B_i(\sigma_{-i})$ lồi hay $B(\sigma)$ cũng lồi.

- $B(\sigma)$ có một đồ thì đóng.

  Giả sử $B(\sigma)$ không có bất cứ đồ thị đóng nào cả, tức tồn tại dãy $(\sigma_n, \overline{\sigma}^n) \to (\sigma, \overline{\sigma})$ với $\overline{\sigma}^n \in B(\sigma^n)$ nhưng $\overline{\sigma} \notin B(\sigma)$. Điều đó dẫn đến có i để $\overline{\sigma}_i \notin B_i(\sigma_{-i})$.

  Sử dụng tính liên tục của u_i và $\sigma_{-i}^n \in \sigma_{-i}$ ta có:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) \geqslant u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}) - \epsilon \tag{28}$$

  với n đủ lớn.

  Ngoài ra dựa vào $\overline{\sigma}_i \notin B_i(\sigma_{-i})$ ta có $\sigma_i' \in \Sigma_i$ và $\epsilon > 0$ thỏa:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) > u_i(\overline{\sigma_i}, \sigma_{-i}) + 3\epsilon \tag{29}$$

  Cộng (28) và (29) ta có:

$$u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^n) > u_i(\overline{\sigma_i}, \sigma_{-i}) + 2\epsilon \geqslant u_i(\overline{\sigma_i}^n, \sigma_{-i}^n) + \epsilon \tag{30}$$

  với bất đẳng thức thứ 2 dựa vào tính liên tục của u_i.

  Phương trình (30) mâu thuẫn với điều kiện $\overline{\sigma}_i^n \in B_i(\sigma_{-i}^n)$ và hoàn tất chứng minh các điều kiện để áp dụng định lí điểm bất động Kakutani.

  Khi đó với mọi tập $B(\sigma)$ đều tồn tại σ^* thỏa $\sigma^* \in B(\sigma^*)$ và chính σ^* cũng chính là chiến lượt cân bằng Nash hỗn hợp.

□

4.2.2 *Sự tồn tại của định lí Nash trong bài toán vô hạn*

Để chứng minh sự tồn tại của Cân bằng Nash trong trò chơi vô hạn ta sẽ sử dụng định lý điểm bất động để chứng minh một định lí sau về chiến lượt thuần túy trong bài toán trò chơi vô hạn:

ĐỊNH LÍ: Xét một trò chơi dạng chiến lượt vô hạn $\langle \mathfrak{I}, (S_i)_{i \in \mathfrak{I}}, (u_i)_{i \in \mathfrak{I}} \rangle$ thỏa mãn với mỗi $i \in \mathfrak{I}$:

- S_i compact và lồi.
- $u_i(s_i, s_{-i})$ liên tục trên s_{-i}.
- $u_i(s_i, s_{-i})$ liên tục và lõm (concave) trên s_i.

Khi đó tồn tại một chiến lược cân bằng Nash thuần túy.
Chú ý: Chú ý vì $u_i : S \to R$ liên tục nên rõ ràng S_i phải vô hạn nên đây chính là một bài toán trò chơi vô hạn.

Chứng minh. Ta sẽ định nghĩa phép phản hồi tương ứng tốt nhất cho người chơi i, $B_i : S_{-i} \to S_i$:

$$B_i(s_{-i}) = \{s'_i \in S_i | u_i(s'_i, s_{-i}) \geqslant u_i(s_i, s_{-i}),\ \forall s_i \in S_i\} \tag{31}$$

Định nghĩa tập những phép phản hồi tương ứng bé nhất như sau:

$$B : S \to S : \ B(s) = [B_i(s_{-i})]_{i \in \mathfrak{I}}$$

Bây giờ sẽ kiểm tra các điều kiện để sử dụng định lý Kakutani để áp dụng vào phép tương ứng $B(s)$.

- S compact, lồi và không rỗng. Điều này dễ có vì $S = \prod_{i \in \mathfrak{I}} S_i$ và các S_i là các tập compact, lồi và không rỗng. Khi đó tích hữu hạn (vì $\mathfrak{I}$ hữu hạn) của những tập compact, lồi và không rỗng cũng là compact, lồi và không rỗng.

- $B(S)$ không rỗng. Ta có theo định nghĩa: $B_i(s_{-i}) = \arg\max_{s\ inS_i} u_i(s, s_{-i})$ với các S_i đều là những tập không rỗng và compact và u_i cũng liên tục theo s nên khi đó theo định lý Weirstrass ta có $B(s)$ không rỗng.

- $B(s)$ là phép tương đối lồi. Giả sử có i và $s_{-i} \in S_{-i}$ sao cho $B_i(s_{-i}) \in \arg\max_{s \in S_i} u_i(s, s_{-i})$ không lồi. Khi đó ta có: $s'_i, s''_i \in S_i$ thỏa mãn $s'_i, s''_i \in B_i(s_{-i})$ và

  $$\lambda s'_i, s_{-i}) + (1-\lambda)u_i(s''_i, s_{-i}) > u_i(\lambda s'_i + (1-\lambda)s''_i, s_{-i})$$

  Tuy nhiên từ tính lõm của $u_i(s_i, s_{-i})$ theo s_i ta có điều mâu thuẫn.

  Vậy ta có kết quả $B(s)$ là phép tương ứng lồi.

- Chứng minh $B(s)$ là đồ thị đóng tương tự như trong trò chơi hữu hạn.

Khi đó áp dụng định lí điểm bất động Kakutani ta có điều phải chứng minh.

□

4.3 Mở rộng với trò chơi liên tục

ĐỊNH LÝ GLICKSBERG : Xét một trò chơi dạng chiến lược $\langle \mathfrak{I}, (S_i)_{i \in \mathfrak{I}}, (u_i)_{i \in \mathfrak{I}} \rangle$ thỏa mãn:

- S_i là một không gian metric không rỗng và compact.

- $u_i(s_i, s_{-i})$ liên tục.

Với những khái niệm trên ta có thể gọi đó là Trò chơi liên tục - Continuous Game. Khi đó với mọi Trò chơi liên tục đều tồn tại một chiến lược cân bằng Nash hỗn hợp.
Có 2 khái niệm mới cần được đứa ra trước khi đi vào chứng minh.

CÂN BẰNG ϵ : Cho một $\epsilon \geqslant 0$, một chiến lượt hỗn hợp $\sigma \in \Sigma$ được gọi là Cân bằng ϵ nếu với mọi $i \in \mathfrak{I}$ và $s_i \in S_i$ ta có:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) \leqslant u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) + \epsilon \tag{32}$$

Hiễn nhiên nếu chọn $\epsilon = 0$ thì ta có Cân bằng ϵ là cân bằng Nash theo nghĩa bình thường.
Hệ quả: Đặt G là một trò chơi liên tục. Giả sử rằng $\sigma^k \to \sigma$, $\epsilon^k \to \epsilon$ và với mỗi k, ϵ^k là một cân bằng ϵ^k của G. Khi đó σ là một cân bằng ϵ của G.

Chứng minh. Với mọi $i \in \mathfrak{I}$ và $s_i \in S_i$ ta có:

$$u_i(s_i, \sigma^k_{-i}) \leqslant u_i(\sigma^k) + \epsilon^k$$

Cho $k \to \infty$ và sử dụng tính liện tục của u_i (cùng hợp với sự hội tụ của phân bố xác suất dưới topo yếu) ta có:

$$u_i(s_i, \sigma_{-i}) \leqslant u_i(\sigma) + \epsilon$$

Vậy ta có điều cần chứng minh. □

Tiếp theo là định nghĩa về sự gần nhau (closeness) của hai trò chơi dạng chiến lượt.

CLOSENESS OF TWO GAME : Đặt G và G' là hai trò chơi dạng chiến lượt với

$$G = \langle \mathfrak{I}, (S_i)_{i\in\mathfrak{I}}, (u_i)_{i\in\mathfrak{I}} \rangle, \qquad G' = \left\langle \mathfrak{I}, (S_i)_{i\in\mathfrak{I}}, (u'_i)_{i\in\mathfrak{I}} \right\rangle$$

Khi đó G' là một α - approximate của G nếu với mọi $i \in \mathfrak{I}$ và $s \in S$ ta có:

$$|u_i(s) - u'_i(s)| \leqslant \alpha \tag{33}$$

Nhận xét: Vì ta có:

$$\begin{aligned} u_i(s_i, \sigma_{-i}) - u_i(\sigma) &= u_i(s_i, \sigma_{-i}) - u'_i(s_i, \sigma_{-i}) + u'_i(s_i, \sigma_{-i}) - u'_i(\sigma) + u'_i(\sigma) - u_i(\sigma) \\ &\leqslant \alpha + \epsilon + \alpha \\ &= \epsilon + 2\alpha \end{aligned}$$

Vậy ta có: Nếu G' là một α - approximate của G và σ là một cân bằng ϵ của G' thì σ là một Cân bằng $(\epsilon + 2\alpha)$ của G.

Hệ quả về sự xấp xỉ của trò chơi liên tục bằng trò chơi hữu hạn: Với bất cứ trò chơi liên tục G nào và $\alpha > 0$, tồn tại một trò chơi hữu hạn G' thỏa mãn G và G' là α - approximate.

Chứng minh. Từ S là một không gian metric compact ta có hàm thỏa dụng u_i là liên tục đều. Ngoài ta vì S_i là một không gian metric compact, ta có thể phủ S_i bằng một phủ hữu hạn là hữu hạn U_i^j với bán kính bé hơn ϵ (không mất tính tổng quát ta có thể giả sử các U_i^j không rỗng và rời nhau).

Chọn $s_i^j \in U_I^j$ với mỗi i, j. Ta định nghĩa một trò chơi hữu hạn G' với hàm thỏa dụng u'_i như sau:

$$u'_i(s) = u_i(s_1^j, ..., s_i^j), \quad \forall s \in U^j = \prod_{k=1}^{I} U_k^j \tag{34}$$

Khi đó với mọi $s \in S$ và $i \in \mathfrak{I}$ ta có:

$$|u'_i(s) - u_i(s)| \leqslant \alpha$$

với $d(s, s^j) \leqslant \epsilon$, $\forall j$.

Đây chính là kết quả cần tìm. □

QUY LẠI VỚI ĐỊNH LÝ GLICKSBERG : Đặt $\{\alpha^k\}$ là một dãy số vô hướng với $\alpha^k \to 0$.

Với mỗi α^k, có một trò chơi G^k hữu hạn và ϵ - approximate của G (mệnh đề trên). Vì G^k là hưu hạn với mọi k nên sử dụng định lý Cân bằng Nash cho trường hợp hữu hạn thì tồn tại một cân bằng- 0, ký hiệu là σ^k. Khi đó σ^k là Cân bằng $2\alpha^k$ của G.

Từ Σ là compact, $\{\sigma^k\}$ có một dãy con hội tụ, đặt σ thỏa $\sigma^{k_n} \to \sigma$.

Khi đó vì $2\alpha^{k_n} \to 0$ và $\sigma^k \to \sigma$, sử dụng mệnh đề đầu tiên ta có: σ là một cân bằng - 0 cho G, hay σ cũng chính là cân bằng Nash cho G. Kết thúc chứng minh.

■

TÀI LIỆU

[1] Lecture notes on Topology
Huỳnh Quang Vũ. Khoa Toán - Tin, Đại học Khoa học tự nhiên TPHCM, 2017.
http://www.math.hcmus.edu.vn/~hqvu/teaching/n.pdf

[2] Nash equilibrium Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Nash_equilibrium

[3] Game Theory with Engineering Applications
Asu Ozdaglar. Massachusetts Institute of Technology Course in Electrical Engineering and Computer Science .
https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-254-game-theory-with-engineering-applications-spring-2010/index.htm

[4] FIXED POINTS AS NASH EQUILIBRIA
Juan Pablo Torres-Martínez. University of Chile, 2006.
https://www.emis.de/journals/HOA/FPTA/Volume2006/036135.pdf

[5] A Tutorial on the Proof of the Existence of Nash Equilibria
Albert Xin Jiang & Kevin Leyton-Brown. Department of Computer Science, University of British Columbia.
http://www.cs.ubc.ca/~jiang/papers/NashReport.pdf

[6] Expected utility hypothesis, Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Expected_utility_hypothesis

[7] Strategy (game theory), Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Strategy_(game_theory)

[8] Advanced Fixed Point Theory for Economics Andrew McLennan.
http://cupid.economics.uq.edu.au/mclennan/Advanced/advanced_fp.pdf

[9] Two-person Games, Brouwer's Fix Point Theorem Friedrich Eisenbrand.
http://disopt.epfl.ch/files/content/sites/disopt/files/shared/OptInFinance10/scribes12_Thomas_Schandlong_v2.pdf

[10] Lecture note 6.825: Techniques in Artificial Intelligence -Decision Making under Uncertainty MIT.
https://ocw.mit.edu/courses/electrical-engineering-and-computer-science/6-825-techniques-in-artificial-intelligence-sma-5504-fall-2002/lecture-notes/Lecture19FinalPart1.pdf

[11] Lecture note: Game Theory Christoph Schottmüller, University of Copenhagen, September 18, 2014.
http://www.econ.ku.dk/schottmueller/teaching/game_theory/gt2014/gt03%20Nash%20existence.pdf

[12] BROUWER'S FIXED POINT THEOREM: THE WALRASIAN AUCTIONEER SCARLETT LI.
http://math.uchicago.edu/~may/REU2014/REUPapers/Li,Scarlett.pdf

[13] Lecture note: Nash Equilibrium. Zhifeng Sun, College of Computer, Northeastern University.
http://www.ccs.neu.edu/home/austin/papers/NashThm.pdf

[14] Game Theory (Part 20) John Baez.
http://math.ucr.edu/home/baez/games/games_20.html