

Tối ưu đồ thị -phần I

Trương Phước Nhân , Cần thơ 09/07/2017

1. Định lý Mantel :

Bài toán 1: (Mantel) Chứng minh rằng với mọi đồ thị chứa nhiều hơn $\frac{n^2}{4}$ cạnh thì chứa một tam giác.

Chứng minh:

Giả sử đồ thị $G=(V,E)$, với $|V|=n$ đỉnh, không chứa tam giác nào. Thì với mỗi cạnh uv , ta phải có $d(u)+d(v) \leq n$ (nếu ngược lại, theo nguyên lý chuồng bồ câu, hai đỉnh u,v sẽ có lân cận chung). Lấy tổng theo tất cả các cạnh ta được

$$n|E| \geq \sum_{\{u,v\} \in E} (d(u)+d(v)) = \sum_{v \in V} d^2(v) \geq \frac{\left(\sum_{v \in V} d(v)\right)^2}{|V|} = \frac{(2|E|)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}, \text{ từ đây ta suy ra } |E| \leq \frac{n^2}{4}.$$

Bài toán 2: Giả sử G là một đồ thị có n đỉnh và chứa ít nhất $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$ cạnh thì G chứa ít nhất là $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tam giác.

Lời giải :

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Bằng cách tính trực tiếp ta thấy khẳng định đúng với $n=3,4$.

Giả sử khẳng định rằng một đồ thị có $n-2$ đỉnh và có ít nhất $\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1$ cạnh thì chứa ít nhất $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ tam giác. Ta chứng minh khẳng định bài toán đúng với n . Giả sử G là một đồ thị có n đỉnh và chứa ít nhất là $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1 + (n-1)$ cạnh nhưng chứa ít hơn $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tam giác. Gọi x và y là hai đỉnh liên hợp (có cạnh nối với nhau) nhưng không chứa trong bất kì tam giác nào (số các cạnh chứa trong các tam giác luôn nhỏ hơn số các cạnh của đồ thị, bởi vì $3\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) < \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor + 1$). Do đó, $d(x)+d(y) \leq n$. Ta nhận thấy đồ thị $H = G - x - y$ là một đồ thị có $n-2$ đỉnh, chứa ít nhất $\left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor + 1$ cạnh. Theo giả thiết quy nạp,

H chứa ít nhất $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor$ tam giác. Số cạnh nối giữa $N(x)$ và $N(y)$ tối đa là $(d(x)-1)(d(y)-1) \leq \frac{(n-2)^2}{4}$.

Giả sử cả $N(x)$ và $N(y)$ là các tập đỉnh độc lập, thì số cạnh tối đa của đồ thị là

$d(x)+d(y)-1 + \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor \leq n-1 + \left\lfloor \frac{(n-2)^2}{4} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, vô lí. Do đó, ta phải có $N(x)$ hoặc $N(y)$ chứa một cạnh. Suy ra, G chứa tối thiểu $\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ tam giác.

Bài toán 3:

Giả sử đồ thị G có n đỉnh với m cạnh. Chứng minh rằng G chứa ít nhất $\frac{4m}{3n} \left(m - \frac{n^2}{4}\right)$ tam giác.

Lời giải: Xét đồ thị G có n đỉnh với m cạnh. Với hai đỉnh liên hợp bất kì x, y chứa ít nhất

$|N(x) \cap N(y)| = |N(x)| + |N(y)| - |N(x) \cup N(y)| \geq d(x) + d(y) - n$ lân cận chung. Do đó, mỗi cạnh $\{x, y\}$ chứa trong ít nhất $d(x) + d(y) - n$ tam giác. Do đó, số các tam giác mà G chứa ít nhất là :

$$\frac{1}{3} \sum_{xy \in E(G)} (d(x) + d(y) - n) = \frac{1}{3} \sum_{x \in V(G)} d^2(x) - \frac{1}{3} mn \stackrel{\text{Cauchy-Schwartz}}{\geq} \frac{\left(\sum_{x \in V(G)} d(x)\right)^2}{3n} - \frac{1}{3} mn = \frac{4m^2}{3n} - \frac{1}{3} mn, \text{ điều phải chứng minh.}$$

Bài toán 4:

Một đồ thị với n đỉnh và chỉ chứa duy nhất một tam giác thì số cạnh tối đa của đồ thị đó là $\left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor + n$.

Lời giải:

Bước 1: Đánh giá: Giả sử G là một đồ thị với n đỉnh và chứa duy nhất một tam giác T . Gọi H là đồ thị con của G trên $V(G) \setminus V(T)$. Dễ thấy H là một triangle-free, sử dụng kết quả của Mantel,

$|E(H)| \leq \left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor$. mỗi đỉnh thuộc H có nhiều nhất là một lân cận nằm trong tam giác T , nếu ngược lại ta thu được thêm được tam giác thứ hai. Do vậy có tối đa là $n-3$ cạnh giữa H và T , nên

$$|E(G)| \leq 3 + (n-3) + |E(H)| = \left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor + n$$

Bước 2: Xây dựng cấu hình tối ưu: Xét đồ thị $K_{\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor, \left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil}$ có $n-3$ đỉnh và $\left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor$ cạnh. Đầu tiên ta bổ

sung thêm một điểm vào phe chứa $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor$ đỉnh và nối đỉnh bổ sung này với tất cả $\left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil$ đỉnh phe còn lại,

tiếp theo ta bổ sung thêm một đỉnh vào phe chứa $\left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil$ đỉnh và nối đỉnh này với tất cả $\left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 1$ đỉnh

thuộc phe đối lập. Ta thu được đồ thị lưỡng phân với lực lượng của từng phe lần lượt là $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ và $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$,

không chứa tam giác và có số cạnh là $\left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n-3}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + n - 2$ cạnh.

Sau cùng, ta bổ sung thêm một đỉnh độc lập không thuộc về phe nào cả và nối đỉnh này với một đỉnh ở mỗi phe cũ.

Khi đó, ta thu được duy nhất một tam giác, và đồ thị này có $\left\lfloor \frac{(n-1)^2}{4} \right\rfloor + n - 2 + 2 = \left\lfloor \frac{(n-3)^2}{4} \right\rfloor + n$ cạnh.

Bài toán 5: Cho G là một đồ thị với n đỉnh không chứa hai tam giác có cạnh chung. Chứng minh rằng G chứa tối đa $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$.

Lời giải:**Bước 1: Đánh giá:**

Ta diễn đạt lại điều kiện của bài toán theo một lời khác: “Với 4 đỉnh bất kì thì số cạnh nối chúng lại với nhau không vượt quá 4”. Dễ dàng, bằng cách xét trực tiếp, nhận ra rằng phát biểu trên của ta tương đương với điều kiện: “Không chứa hai tam giác có cạnh chung”.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Bằng cách xét trực tiếp thì khẳng định đúng với các trường hợp $n=1, 2, 3, 4$. Giả sử khẳng định được chứng minh với mọi giá trị bé hơn n . Ta xem xét hai trường hợp sau đây có thể xảy ra:

Trường hợp 1: Không tồn tại 4 đỉnh trong đồ thị mà số cạnh nối giữa chúng đúng bằng 4. Trong trường hợp này thì ta có thể bổ sung thêm một cạnh vào đồ thị để cho điều kiện bài toán vẫn được thỏa mãn. Do đó, số cạnh của đồ thị chưa tối ưu.

Trường hợp 2: Tồn tại 4 đỉnh, ta tạm gọi là a, b, c, d với các cạnh ab, bc, cd, da nối giữa chúng. Theo giả thiết quy nạp thì số cạnh của đồ thị $H = G - a - b - c - d$ tối đa là $\left\lfloor \frac{(n-4)^2}{4} \right\rfloor$. Ta thực hiện việc đánh giá số các cạnh nối giữa $\{a, b, c, d\}$ và đồ thị H . Xét đỉnh $e \in H$ thì e có tối đa là 2 lân cận trong tập $\{a, b, c, d\}$.

Thật vậy, nếu e có 3 lân cận nằm trong tập $\{a, b, c, d\}$, ta tạm gọi là a, b, c . Khi đó, có 5 cạnh nối các đỉnh $\{a, b, c, e\}$ lại với nhau đó là: ea, eb, ec, ab, bc .

Điều này dẫn đến số các cạnh của đồ thị tối đa bằng

$$\left\lfloor \frac{(n-4)^2}{4} \right\rfloor + 2(n-4) + 4 = \left\lfloor \frac{(n-4)^2 + 2 \cdot 4(n-4) + 4^2}{4} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor.$$

2. Định lý Turan :

Bài toán 1: (Zarankiewicz) Nếu đồ thị G không chứa k -clique thì ta tìm được một đỉnh có bậc $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor$.

Chứng minh : Giả sử phản chứng. Xét một đỉnh bất kì v_1 . Đặt $N(v_i)$ là tập các lân cận của v_i . Theo phản chứng với x là một điểm bất kì ta có: $|N(v_1)| = d(v_1) > \left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor > 0$. Do đó, tồn tại đỉnh $v_2 \in N(v_1)$.

$$\text{Ta có: } |N(v_1) \cap N(v_2)| = |N(v_1)| + |N(v_2)| - |N(v_1) \cup N(v_2)| \geq 2 \left(\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + 1 \right) - n > 0$$

Khi đó, tồn tại $v_3 \in N(v_1) \cap N(v_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |N(v_1) \cap N(v_2) \cap N(v_3)| &= |N(v_1) \cap N(v_2)| + |N(v_3)| - |(N(v_1) \cap N(v_2)) \cup N(v_3)| \\ &\geq \left(2 \left(\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + 1 \right) \right) - n = 3 \left(\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + 1 \right) - n > 0 \end{aligned}$$

Thực hiện quá trình lập luận tương tự, ta chỉ ra được sự tồn tại $v_{k-1} \in \bigcap_{i=1}^{k-2} N(v_i)$ để:

$$\left| \bigcap_{i=1}^{k-1} N(v_i) \right| \geq (k-1) \left(\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + 1 \right) - (k-2)n > 0$$

Do đó, tồn tại $v_k \in \bigcap_{i=1}^{k-1} N(v_i)$. Khi đó, $v_1, v_2, \dots, v_k$ lập thành một đồ thị con đầy đủ của G .

Bài toán 2 : (Turan) Nếu đồ thị $G = (V, E)$ trên n không chứa $(k+1)$ -clique (đôi khi ta cũng gọi tắt đồ thị G là k -free), $k \geq 2$, thì $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}$.

Chứng minh thứ 1: Ta sử dụng phép qui nạp theo n . Khi $n=2$, bất đẳng thức hiển nhiên đúng. Bây giờ ta giả sử bất đẳng thức đúng cho mọi đồ thị có tối đa $n-1$ đỉnh, và $G=(V, E)$ là đồ thị trên n đỉnh và không có $(k+1)$ -clique và có số cạnh lớn nhất. Đồ thị này dĩ nhiên là phải chứa k -clique, bởi nếu không ta có thể thêm cạnh. Giả sử A là k -clique và $B = V - A$.

Vì A là k -clique, A chứa $e_A = \binom{k}{2}$ cạnh. Gọi e_B là số cạnh nối các đỉnh của B và $e_{A,B}$ là số cạnh nối giữa các đỉnh A và B .

Theo giả thiết quy nạp, ta có $e_A \leq \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{(n-k)^2}{2}$. Vì G không có $(k+1)$ -clique, nên mỗi đỉnh $x \in B$ kề với nhiều nhất $k-1$ đỉnh thuộc A , ta thu được $e_{A,B} \leq (k-1)(n-k)$.

Cộng các bất đẳng thức này lại ta thu được:

$$|E| = e_A + e_B + e_{A,B} \leq \binom{k}{2} + \binom{k}{2} \frac{(n-k)^2}{2} + (k-1)(n-k) = \binom{k}{2} \left(1 - \frac{n-k}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \frac{n^2}{2}.$$

Chứng minh thứ 2:

Ta chứng minh một kết quả mạnh hơn so với khẳng định có trong bài toán:

Nếu G là một đồ thị k -free với n đỉnh thì G chứa không quá $\frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \frac{r^2 - r}{2}$, trong đó r là dư trong phép chia n cho $k-1$.

Ta chứng minh bằng quy nạp theo n . Giả sử kết quả đúng với mọi đồ thị k -free có tối đa $n-1$ đỉnh.

Từ kết quả của Zarankiewicz (xem bài toán 1) thì ta tìm được một đỉnh có bậc không quá $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor$. Xét đồ thị con thu được từ $n-1$ đỉnh còn lại sẽ là k -free.

Do đó, số các cạnh tối đa là $\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{(n-1)^2 - s^2}{2} + \binom{s}{2}$, trong đó s là số dư trong phép chia $n-1$

cho $k-1$. Bằng tính toán trực tiếp, ta nhận thấy rằng s hoặc là bằng $r-1$ ($0 < r \leq k-1$); hoặc $k-2$ ($r=0$). Trong cả hai trường hợp này, cũng bằng việc tính toán, ta luôn chỉ ra được rằng :

$$\left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{(n-1)^2 - s^2}{2} + \binom{s}{2} = \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2 - r^2}{2} + \binom{r}{2}.$$

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 3: Giả sử S là một tập gồm n điểm trong mặt phẳng với đường kính bằng 1, có nghĩa là ta không thể tìm được hai điểm có khoảng cách lớn hơn hẳn 1. Chứng minh rằng số các cặp điểm có khoảng cách

$$\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ tối đa bằng } \left\lfloor \frac{n^2}{3} \right\rfloor.$$

Lời giải: Đặt $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Xét đồ thị G trên tập điểm S xác định như sau : ta nối hai đỉnh với nhau nếu khoảng cách giữa hai điểm tương ứng $\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ta cần chỉ ra rằng G là một K_4 -free.

Thật vậy, nhận xét rằng bao lồi của 4 điểm hoặc là một đoạn thẳng, hoặc một tam giác hoặc là một tứ giác lồi. Trong trường hợp nào ta cũng luôn tìm được 3 điểm x_i, x_j, x_k sao cho góc giữa x_jx_i và x_jx_k ít nhất bằng 90° . Ta xét tam giác có các đỉnh tương ứng x_i, x_j, x_k . Nếu ta có đồng thời $d(x_i, x_j) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ và

$d(x_j, x_i) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Áp dụng định lí cosin, ta được

$$d^2(x_i, x_k) = d^2(x_i, x_j) + d^2(x_j, x_k) - 2d(x_i, x_j)d(x_j, x_k)\cos\alpha \geq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - 2\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 90^\circ = 1.$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó, có ít nhất là một cặp x_j và x_i ; hoặc x_j và x_i không có cạnh nối nhau trong đồ thị G . Suy ra G là một K_4 -free.

Sử dụng kết quả của Turan, ta thu được số cạnh của G nhiều nhất là $\frac{2}{3} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{3}$. Từ đây ta dễ dàng suy ra điều phải chứng minh.

3. Tài liệu tham khảo:

- [1]. Trần Nam Dũng, Tài liệu bồi dưỡng đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2010, ??/06/2010.
- [2]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [3]. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Third Edition.
- [4]. David Conlon, Extremal graph theory.