

Tối ưu đồ thị - phần II

Trương Phước Nhân 17/07/2017

Đồ thị không chứa 4- chu trình:

Bài toán 1 : (Reiman) Nếu đồ thị $G = (V, E)$ với n đỉnh và không chứa 4-chu trình thì

$$|E| \leq \left\lfloor \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor.$$

Lời giải:

Bước 1: Đánh giá: Gọi $G = (V, E)$ là một đồ thị C_4 - free với tập đỉnh $V = \{1, 2, \dots, n\}$, và $d_1, d_2, \dots, d_n$ lần lượt là bậc của các đỉnh tương ứng. Ta thực hiện đếm bằng hai cách số phần tử của tập S các bộ $(u, \{v, w\})$ sao cho v không có cạnh nối với w và đỉnh u liên hợp với cả hai đỉnh v và w .

Nhận xét: Mọi cặp $\{v, w\}$ chỉ có nhiều nhất một lân cận chung, do tính chất C_4 - free của đồ thị G .

Cách 1: Với mỗi đỉnh x ta chọn ra hai lân cận bất kì của nó, có $\binom{d_x}{2}$ cách để thực hiện.

Do đó, $|S| = \sum_{x \in V} \binom{d_x}{2}$, chú ý nhận xét.

Cách 2: Từ nhận xét, thì $|S| \leq$ Số cách chọn ra tập $\{v, w\}$ từ $V = \binom{n}{2}$.

$$\text{Từ đây ta có : } \sum_{x \in V} \binom{d_x}{2} \leq \binom{n}{2} \Rightarrow \sum_{x \in V} d_x^2 - \sum_{x \in V} d_x \leq n^2 - n \Rightarrow \sum_{x \in V} d_x^2 \leq \sum_{x \in V} d_x + n^2 - n.$$

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz: } \left(\sum_{x \in V} d_x \right)^2 &\leq n \sum_{x \in V} d_x^2 \\ &\Rightarrow \left(\sum_{x \in V} d_x \right)^2 \leq n \sum_{x \in V} d_x + (n^2 - n)n \end{aligned}$$

$$\text{Sử dụng hằng đẳng thức Euler: } \sum_{x \in V} d_x = 2|E|, \text{ ta thu được bất phương trình } |E|^2 - \frac{n}{2}|E| - \frac{n^2(n-1)}{4} \leq 0.$$

$$\text{Giải bất phương trình này ta thu được : } |E| \leq \left\lfloor \frac{n}{4} (1 + \sqrt{4n-3}) \right\rfloor.$$

Bước 2: Xây dựng cấu hình tối ưu. Ta xét trường hữu hạn $\mathbb{Z}_p$ các số nguyên module theo số nguyên tố p .

Xét không gian vector V 3-chiều trên $\mathbb{Z}_p$. Ta xây dựng đồ thị G_p trên X theo cách sau:

- Các đỉnh của G_p là các không gian con 1-chiều, $[v] := \text{span}_{\mathbb{Z}_p} \{v\}$, $0 \neq v \in X$.

- Nối hai không gian con $[v], [w]$ khi và chỉ khi “tích vô hướng” $\langle v, w \rangle := v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0$.

Lưu ý rằng các vector $\neq 0$ nên cách ta xác định là hoàn toàn đúng đắn.

(Theo ngôn ngữ hình học, xem bài “**Các bài toán về tập hợp**”, thì các đỉnh là các điểm của mặt phẳng xạ ảnh trên $\mathbb{Z}_p$, hai đỉnh $[w]$ được nối với $[v]$ nếu w nằm trên đường thẳng đối cực của v .) Ta tiến hành kiểm tra lại các tính chất của đồ thị G_p .

1) Tính chất C_4 - free :

Thật vậy, giả sử $[u]$ là lân cận chung của $[v]$ và $[w]$, thì $u = (u_1, u_2, u_3)$ là nghiệm của hệ tuyến tính :

$$v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = 0$$

$$w_1 u_1 + w_2 u_2 + w_3 u_3 = 0$$

Do v và w là độc lập tuyến tính nên hệ trên có tập nghiệm là một không gian con 1-chiều, có nghĩa là lân cận $[u]$ tồn tại và duy nhất.

2) Số đỉnh của đồ thị G_p :

Không gian vector V chứa $p^3 - 1$ vector $\neq 0$. Mỗi không gian con 1-chiều chứa $p - 1$ vector $\neq 0$. Do đó không gian vector V có $\frac{p^3 - 1}{p - 1} = p^2 + p + 1$ không gian con 1- chiều, G_p có $n = p^2 + p + 1$ đỉnh.

3) Bậc của các đỉnh của đồ thị G_p :

Theo cách mà ta xây dựng đồ thị G_p , thì bậc của một đỉnh $[u]$ là số các nghiệm khác 0 của phương trình

$$u_1x + u_2y + u_3z = 0$$

Nghiệm của phương trình là một không gian con 2-chiều. Do các không gian con 2-chiều chứa $p^2 - 1$ vector $\neq 0$. Mỗi không gian con 1-chiều chứa $p - 1$ vector $\neq 0$. Do đó không gian vector V có

$\frac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$ không gian con 2- chiều. Lưu ý một điểm nhấn quan trọng là bản thân u cũng có thể là một

nghiệm của phương trình này. Nên ta cần tính số các không gian con 1-chiều nằm trên conic :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Bổ đề : Phương trình $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ có đúng $p + 1$ nghiệm trên $\mathbb{Z}_p^3 / \{0\}$.

Chứng minh của bổ đề:

Do một không gian con 1-chiều được đặc trưng bởi vector cơ sở v_i của nó, nên gọi $v_1, v_2, \dots, v_{p^2+p+1}$ là các không gian con 1-chiều. Không gian con 2- chiều tương ứng với $u = (u_1, u_2, u_3)$ là tập nghiệm của phương trình $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ ta đặc trưng nó bởi vector $u = (u_1, u_2, u_3)$. Khi đó, một không gian con 1- chiều đặc trưng bởi v_i , nằm trong không gian con 2-chiều đặc trưng bởi v_j khi và chỉ khi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$.

Xét ma trận 0-1, $A = (a_{ij})$ có cấp $(p^2 + p + 1) \times (p^2 + p + 1)$ với các hàng và các cột được đánh số bởi $v_1, v_2, \dots, v_{p^2+p+1}$ (ta sử dụng cùng một thứ tự) với $a_{ij} = 1$ khi và chỉ khi $\langle v_i, v_j \rangle = 0$. A là một ma trận thực đối xứng và $a_{ii} = 1$ khi và chỉ khi $\langle v_i, v_i \rangle = 0$, hay nói cách khác khi v_i nằm trên conic $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ nên $\text{trace}(A)$ đếm số không gian con 1-chiều nằm trên conic $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Ta tính $\text{trace}(A)$.

Từ đại số tuyến tính ta biết rằng vết bằng tổng các giá trị riêng của ma trận A . Ta có một số nhận xét về ma trận A như sau:

- Mỗi hàng của ma trận A chứa chính xác $p + 1$ số 1. Do đó $p + 1$ là một giá trị riêng của A tương ứng với vector riêng $\mathbf{1}$ (vector có tất cả các thành phần bằng 1), bởi vì $A\mathbf{1} = (p + 1)\mathbf{1}$.

- Với hai hàng bất kỳ v_i, v_j phân biệt thì ta luôn tìm được chính xác một cột sao cho tại giao điểm của cột này với hai hàng v_i, v_j được điền số 1.

Sử dụng hai kết quả này và một số tính toán cơ bản ta thu được :

$$A^2 = \begin{pmatrix} p+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & p+1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & p+1 \end{pmatrix} = pI + J, \text{ trong đó } I \text{ là ma trận đơn vị còn } J \text{ là ma trận có các phần tử}$$

đều bằng 1.

Ma trận J có 1 giá trị riêng $p^2 + p + 1$ và $p^2 + p$ giá trị riêng 0 (thu được bằng tính toán trực tiếp) Do đó A^2 có 1 giá trị riêng $p^2 + 2p + 1 = (p + 1)^2$ và $p^2 + p$ giá trị riêng p . Theo nhận xét thì A là ma trận đối xứng nên chéo hóa được và ta nhận thấy rằng các giá trị riêng của A chỉ có thể là $p + 1$ hoặc $-(p + 1)$ và $p^2 + p$ giá trị riêng $\pm\sqrt{p}$. Theo nhận xét thì giá trị riêng đầu tiên phải là $p + 1$. Giả sử $\sqrt{p}$ có số bội là

s và $\sqrt{p}$ có số bội là r thì $\text{trace}(A) = p+1+s\sqrt{p}-r\sqrt{p}$. Do $\text{trace}(A)$ là một số nguyên nên $\text{trace}(A) = p+1$.

Trở lại vấn đề mà ta đang xem xét thì từ bổ đề ta có $p+1$ đỉnh bậc p (loại bỏ đi bản thân nó) và $(p^2 + p + 1) - (p+1) = p^2$ đỉnh có bậc $p+1$. Suy ra

$$|E| = \frac{(p+1)p}{2} + \frac{p^2(p+1)}{2} = \frac{(p+1)^2 p}{2} = \frac{(p+1)p}{2} (1 + (2p+1)) = \frac{p^2 + p}{4} (1 + \sqrt{4p^2 + 4p + 1})$$

$$\text{Do } n = p^2 + p + 1 \Rightarrow |E| = \frac{n-1}{4} (1 + \sqrt{4n-3}).$$

Tài liệu tham khảo:

- [1]. Martin Aigner, Gunter M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Third Edition.
- [2]. David Conlon, Extremal graph theory.
- [3]. Stasys Jukna, Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [4]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về tập hợp, 12/07/2017