

Phương pháp qui nạp + song ánh

Trương Phước Nhân , 17/07/2017

Các bài toán cơ bản:

Bài toán 1: Cho tập $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Hỏi tập X_n có bao nhiêu tập con ?

Lời giải 1: Ta xem xét vấn đề một cách tự nhiên nhất có thể. Gọi S_n là số các tập con của tập

$X_n = \{1, 2, \dots, n\}$, ta khảo sát một vài giá trị đầu tiên của S_n :

Với $n=1 \Rightarrow S_n = 2$

$n=2 \Rightarrow S_n = 4$

$n=3 \Rightarrow S_n = 8$

$n=4 \Rightarrow S_n = 16$

Từ các kết quả nhận được này ta đưa ra phán đoán rằng với $n=k$ thì $S_k = 2^k$. Ta sẽ đưa ra một lập luận toán học chặt chẽ để lí giải vấn đề này, một cách tự nhiên thì qui nạp sẽ được nghĩ tới đầu tiên.

Giả sử dự đoán của ta đúng với $n=k$, có nghĩa là số các tập con của $\{1, 2, \dots, k\}$ là 2^k . Ta xem xét số phần tử của tập $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$. Xét $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ là một tập con của $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$ thì ta có hai khả năng xảy ra:

Trường hợp thứ 1: Nếu $k+1 \notin A$ thì A là một tập con của $\{1, 2, \dots, k\}$, theo giả thiết qui nạp có 2^k tập.

Trường hợp thứ 2: Nếu $k+1 \in A$ thì $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{m-1}, k+1\}$, ta tạm giả sử là $a_m = k+1$.

Ta cần chứng minh rằng tập $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$ có 2^{k+1} tập con nhưng như vậy thì có nghĩa là số tập con nằm trong trường hợp thứ 2 bằng $2^{k+1} - 2^k = 2^k$ bằng với số tập con trong trường hợp thứ 1

Điều này gợi cho ta về ý tưởng song ánh, ta đặt tương ứng một tập con $B \subset \{1, 2, \dots, k\}$ với một tập con $B \cup \{k+1\} \subset \{1, 2, \dots, k, k+1\}$, dễ dàng thấy rằng tương ứng này là một ánh xạ và còn là một song ánh nếu ta xét tập nguồn là các tập con của $\{1, 2, \dots, k\}$ và tập đích là các tập con của $\{1, 2, \dots, k, k+1\}$ thuộc trường hợp 2. Đến đây bằng tính toán đơn giản ta suy ra điều phải chứng minh.

Lời giải 2: Ta sẽ tìm cách “mô tả” các tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ bằng cách sử dụng vector đặc trưng, ta đặt một tập con A tương ứng với một bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, trong đó $a_i = 1$ nếu $i \in A$ và 0 trong trường hợp ngược lại. Phép đặt của ta hiển nhiên là một ánh xạ và hơn thế nữa còn là một song ánh. Do đó, số các tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$ bằng 2^n .

Bài toán 2: Cho tập $X_n = \{1, 2, \dots, n\}$. Gọi $\binom{n}{k}$ là số các tập con của X_n với k phần tử.

Chứng minh rằng: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Lời giải: Trước tiên thì bài toán này hao hao giống với bài toán 1 vậy thì liệu ta có thể áp dụng lối lập luận trong bài toán trước? Ta nghĩ ngay đến việc sử dụng lời giải thứ 1, bởi vì lời giải thứ 2 cung cấp cho ta ít

thông tin để suy luận. Đặt $\binom{n}{k}$ là số các tập con của tập X_n với k phần tử.

Tính toán trực tiếp, ta nhận thấy rằng:

$$n=1: \binom{1}{0} = 1, \binom{1}{1} = 1$$

$$n=2: \binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1$$

$$n=3: \binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1$$

$$n=4: \binom{4}{0} = 1, \binom{4}{1} = 4, \binom{4}{2} = 6, \binom{4}{3} = 4, \binom{4}{4} = 1$$

$$n=5: \binom{5}{0}=1, \binom{5}{1}=5, \binom{5}{2}=10, \binom{5}{3}=10, \binom{5}{4}=5, \binom{5}{5}=1$$

.....

Quy luật trong các dãy số này nếu tinh ý ta sẽ dễ dàng nhận ra rằng : $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$. Ta sẽ chứng minh lại dự đoán này bằng phương pháp qui nạp toán học :

Giả dự đoán của ta được xác định với mọi tập con có số phần tử nhỏ hơn bằng n .

Ta xét tập $\{1, 2, \dots, n, n+1\}$, gọi A là một tập con với k phần tử.

Trường hợp 1: Nếu $n+1 \notin A$ thì A là một tập con của tập $\{1, 2, \dots, n\}$ với k phần tử

Trường hợp 2: Nếu $n+1 \in A$ thì $A = \{a_1, a_2, \dots, n+1\}$ và tập $B := A \setminus \{n+1\}$ là một tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$ với $k-1$ phần tử và ngược lại nếu B là một tập con với $k-1$ phần tử của $\{1, 2, \dots, n\}$ thì $B \cup \{n+1\}$ là một tập con với k phần tử

Từ những phân tích này ta thu được : $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$, điều phải chứng minh.

Bài toán 3:

Cho tập $X_n = \{1, 2, \dots, n, n+1\}$. Gọi S_n là số tập con của X_n chứa duy nhất cặp số nguyên liên tiếp $\{n, n+1\}$.

Chứng minh rằng : $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$ với $n \geq 2$

Lời giải: Ý tưởng tiếp cận của ta cũng giống như ở hai ví dụ trước. Gọi C_n là họ các tập con của X_n chứa duy nhất cặp số nguyên liên tiếp $\{n, n+1\}$. Bằng việc tính toán trực tiếp, ta nhận thấy:

$$n=1: X_n = \{1, 2\} \Rightarrow C_n = \{\{1, 2\}\} \Rightarrow S_1 = 1$$

$$n=2: X_n = \{1, 2, 3\} \Rightarrow C_n = \{\{2, 3\}\} \Rightarrow S_2 = 1$$

$$n=3: X_n = \{1, 2, 3, 4\} \Rightarrow C_n = \{\{3, 4\}, \{1, 3, 4\}\} \Rightarrow S_3 = 2$$

$$n=4: X_n = \{1, 2, 3, 4, 5\} \Rightarrow C_n = \{\{4, 5\}, \{1, 4, 5\}, \{2, 4, 5\}\} \Rightarrow S_4 = 3$$

$$n=5: X_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow C_n = \{\{5, 6\}, \{1, 5, 6\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 5, 6\}, \{1, 3, 5, 6\}\} \Rightarrow S_5 = 5$$

.....

Từ các kết quả trên ta đưa ra dự đoán : $S_{n+1} = S_n + S_{n-1}$, với $n \geq 2$.

Nếu A là một tập con thuộc họ C_n thì $A = B \cup \{n, n+1\}$, trong đó B là một tập con của $\{1, 2, \dots, n-2\}$ và không chứa hai số nguyên liên tiếp. Ta có hai trường hợp có thể xảy ra :

Trường hợp 1: Nếu $n-2 \in B$ thì $C := B \cup \{n-1\}$ là một tập con của $\{1, 2, \dots, n-1\}$ và chứa duy nhất cặp số nguyên liên tiếp $\{n-2, n-1\}$; và ngược lại nếu C là một tập con của $\{1, 2, \dots, n-1\}$ chứa duy nhất cặp số nguyên liên tiếp $\{n-2, n-1\}$ thì $B := C \setminus \{n-1\}$ là tập con của $\{1, 2, \dots, n-2\}$ và không chứa hai số nguyên liên tiếp và $n-2 \in B$. Dễ thấy đây là một song ánh nên số tập con trong trường hợp này là S_{n-2} .

Trường hợp 2: Nếu $n-2 \notin B$ thì tập $C := B \cup \{n-1, n\}$ là một tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$ và chứa duy nhất cặp số nguyên liên tiếp $\{n-1, n\}$; ngược lại nếu C là tập con của $\{1, 2, \dots, n\}$ và chứa duy nhất cặp số nguyên liên tiếp $\{n-1, n\}$ thì $B := C \setminus \{n-1, n\}$ là tập con của $\{1, 2, \dots, n-2\}$ và không chứa hai số nguyên liên tiếp, hiển nhiên rằng $n-2 \notin B$ vì nếu ngược lại thì tập C chứa thêm cặp số $\{n-2, n-1\}$. Tương tự như ý trên phép đặt này là một song ánh nên số tập con trong trường hợp này là S_{n-1} .

Ta đã chứng minh được đẳng thức : $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$.

Lưu ý : Trong bài 3 ta chỉ sử dụng tư tưởng của phép qui nạp chứ không thực hiện qui nạp toán học.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Tài liệu chuyên toán 10

[2]. Tomescu, Problem in Combinatoric.

