Phương pháp xác suất

Trương Phước Nhân , Cần Thơ 09/07/2017

Các ví dụ :

Bài toán 1: Gọi $A_1, A_2, ..., A_n$ là các tập con k phần tử của tập A. Nếu $n < 2^{k-1}$ thì ta có thể tìm được một cách tô màu các phần tử của $A = R \cup B$ bởi hai màu xanh và đỏ sao cho $A_i \cap R \neq \emptyset$ và $A_i \cap B \neq \emptyset$ với $1 \le i \le n$, trong đó R là tập các phần tử tô màu đỏ còn B là tập các phần tử tô màu xanh.

Lời giải:

Ta xét một cách tô màu ngẫu nhiên các phần tử của tập A, $\Omega = \left\{ f : A \to \{R, B\} \right\}$, với phân bố đều.

Đặt E_i là biến cố : Các phần tử của tập A_i được tô bởi một màu , có nghĩa là, $A_i \subseteq R$ hoặc $A_i \subseteq B$

E là biến cố : Tồn tại chỉ số i sao cho các phần tử của tập A_i được tô bởi một màu , có nghĩa là, $A_i \subseteq R$ hoặc $A_i \subseteq B$

$$\Rightarrow E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$$

$$\Rightarrow P(E) \le \sum_{i=1}^{n} P(E_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{n}{2^{k-1}} < 1$$

Bằng cách vận dụng định lý Ramsey ta có thể chứng minh được khẳng định của Van Der Waerden :

Với $k \ge 1$ là số nguyên dương cho trước ta luôn tìm được số W_k sao cho với $n \ge W_k$ thì từ một cách tô màu bất kì các phần tử của tập $\{1, 2, ..., n\}$ bởi hai màu xanh và đỏ thì ta luôn tìm được một cấp số cộng với k số hạng và có các phần tử được tô cùng màu.

Bài toán 2: Chứng minh rằng : $W_k \ge 2^{\frac{k}{2}}$

Lời giải: Ta xét một cách tô màu ngẫu nhiên các phần tử của tập $\{1, 2, ..., n\}$, trong đó $n \le 2^{\frac{k}{2}}$.

Với mọi cấp số cộng S gồm k số hạng : $a, a+b, a+2b, ..., a+(k-1)b$.

Đặt A_S là biến cố : Các phần tử của S được tô cùng màu

$$\Rightarrow P(A_S) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 2^{1-k}$$

Nhận xét: cấp số cộng S được xác định duy nhất bởi hai thông số a, b nên số các cấp số cộng $\le \binom{n}{2}$.

Do đó: $P\left(\bigcup_S A_S\right) \le \sum_S P(A_S) \le \binom{n}{2} 2^{1-k} < n^2 2^{-k} \le 1.$

Điều này có nghĩa là ta có thể tìm được một cách tô màu các phần tử của tập $\{1, 2, ..., n\}$ bởi hai màu xanh và đỏ sao cho mọi cấp số cộng S với k số hạng đều chứa hai phần tử được tô màu khác nhau. Từ khẳng định của định lí Van Der Waerden ta suy ra : $W_k \ge 2^{\frac{k}{2}}$

Bài toán 3: Cho số nguyên $k \ge 3$. Chứng minh rằng : $R(k,k) \ge 2^{\frac{k}{2}}$

(xem lại bài viết " Định lý Ramsey và các ứng dụng")

Lời giải : Ta cần chứng minh rằng nếu $n \le 2^{\frac{k}{2}}$ thì ta luôn tìm được một cách tô màu các cạnh của đồ thị K_n bởi hai màu xanh và đỏ sao cho với $k-$clique bất kì luôn chứa hai cạnh được tô khác màu. Ta thực hiện việc tô màu ngẫu nhiên các cạnh của đồ thị K_n bằng hai màu xanh và đỏ với phân bố đều, có nghĩa là ta tô màu một cạnh bởi màu xanh hoặc màu đỏ với xác suất bằng $\frac{1}{2}$. Ta sẽ chuyển những phân tích trên thành dạng toán học như sau :

Đặt E_R là biến cố : Tồn tại một $k-clique$ với các cạnh được tô màu đỏ

E_B là biến cố : Tồn tại một $k-clique$ với các cạnh được tô màu xanh

Ta cần chứng minh rằng $P(E_R \cup E_B) < 1$

Gọi $C_1, C_2, ..., C_N$ là các $k-clique$ của đồ thị K_n , trong đó $N := \binom{n}{k}$.

Đặt $E_{R,i}$ là biến cố : C_i có các cạnh được tô màu đỏ.

Bằng tính toán ta thu được :

$$P(E_R \cup E_B) \le P(E_R) + P(E_B) = 2P(E_R) = 2P\left(\bigcup_{j=1}^{N} E_{R,j}\right) \le 2\sum_{j=1}^{N} P(E_{R,j}) = 2\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = 2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

$$\le 2\frac{n^k}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} \le 2\frac{2^{\frac{k^2}{2}}}{k!}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} = \frac{2^{1+\frac{k}{2}}}{k!} < 1, \text{ đpcm}$$

Bài toán 4: Chứng minh rằng nếu đồ thị G có n đỉnh và gọi $d(v)$ là bậc của đỉnh v thì ta luôn tìm được một tập độc lập với kích thước $\ge \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$.

Hơn nữa, nếu G có e cạnh thì ta luôn tìm được một tập độc lập với kích thước $\ge \frac{n^2}{2e+n}$.

<u>Lời giải:</u>

(Ta tiếp cận vấn đề một cách đối ngẫu dựa trên chứng minh định lý Turan bằng công cụ xác suất, xem thêm bài viết **<u>" Định lý Turan và các hướng tiếp cận khác nhau trong chứng minh"</u>**).

Giả sử $V(G) = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Ta chọn một hoán vị bất kì $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ (có xác suất bằng $\frac{1}{n!}$) và xây dựng trên đó một tập S theo quy tắc: ta đặt π_i vào trong tập S khi và chỉ khi là π_i không có cạnh nối với tất cả các đỉnh $\pi_j\,(j<i)$. Theo cách định nghĩa này thì S là một tập độc lập.

Đặt $X := |S|$ là biến ngẫu nhiên chỉ số phần tử của tập S. Khi đó ta có phân tích sau : $X = \sum_{i=1}^{n} X_{v_i}$, trong đó X_{v_i} là biến ngẫu đặc trưng của đỉnh v_i , có nghĩa là $X_{v_i} = 1$ hoặc 0 phụ thuộc vào việc $v_i \in S$ hay $v_i \notin S$. Giả sử ta có một hoán vị $\pi = (\pi_1, ..., \pi_n)$ ta tiến hành xây dựng tập S theo quy tắc nêu trên thì phần tử $v_i \in S$ khi và chỉ khi v_i nằm ở vị trí thứ $n - d(v_i)$ và tất cả các phần tử $\pi_1, ..., \pi_{n-d(v_i)-1}$ đều không phải là các lân cận của phần tử v_i. Ta thu được $E(X_{v_i}) = P(X_{v_i} = 1) = \frac{1}{d(v_i)+1}$, sử dụng tính tuyến tính của kì vọng ta được :

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_{v_i}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d(v_i)+1} = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$. Điều này chỉ ra rằng đồ thị G chứa một tập độc lập với kích thước $\ge \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1}$.

Áp dụng bất đẳng thức Jensen ta thu được đánh giá : $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1} \ge n \frac{1}{\frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{n} + 1}$.

Sử dụng hằng đẳng thức Euler , $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2e$, ta được: $\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v)+1} \ge \frac{n}{\frac{2e}{n}+1} = \frac{n^2}{2e+n}$, từ đây suy ra đpcm.

Bài toán 5: Chứng minh rằng : Đối với một đồ thị con bất kì của $G = (V, E)$ với $|V| = n \ge 2^{s+t} - 1$ ta luôn tìm được hoặc một tập độc lập kích thước s hoặc là một clique kích thước t .

Lời giải :

<u>Bước 1: Đánh giá :</u>Ta chứng minh bằng qui nạp theo $s+t$.

Bằng tính toán trực tiếp ta thấy khẳng định là hiển nhiên với $s \le 2, t \le 2$ (Một đỉnh được xem như là 1-clique hoặc là tập độc lập với một phần tử; hai đỉnh được nối với nhau là 2-clique và nếu ngược lại thì là tập độc lập với hai phần tử)
Giả sử khẳng định đúng với mọi s và t sao cho $s+t \le k-1$.
Ta cần chứng minh khẳng định đúng với $s+t=k$. Xét một đỉnh $v \in A$, có các trường hợp sau :
Trường hợp 1: v có ít nhất $\frac{n-1}{2} \ge \frac{2^{s+t}-2}{2} = 2^{s+t-1}-1$ đỉnh lân cận. Theo giả thiết qui nạp thì đồ thị con cảm sinh trên tập các lân cận của đỉnh v hoặc là chứa một tập độc lập kích thước s hoặc là chứa một clique kích thước $t-1$. Do đó , G hoặc chứa một tập độc tập kích thước s hoặc một cilque kích thước t
Trường hợp 2: v có $\frac{n-1}{2} \ge 2^{s+t-1}-1$ đỉnh không phải là lân cận. Áp dụng giả thiết qui nạp cho tập các đỉnh không phải là lân cận này ta tìm được hoặc là một tập độc lập với kích thước $s-1$ hoặc là một clique với kích thước t. Do đó , G hoặc chứa một tập độc tập kích thước s hoặc một cilque kích thước t
Bước 2: Xây dựng cấu hình tối ưu:
Để thực hiện xậy dựng cấu hình tối ưu cho bài toán ta sử dụng mô hình đồ thị ngẫu nhiên (xem bài "Đồ thị ngẫu nhiên")
Ta chứng minh khẳng định sau :
Kết quả : Đồ thị $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$ không chứa một tập đỉnh độc lập hoặc là một clique kích thước $\lfloor 2\log_2 n \rfloor + 1$ với xác suất cao.
Chứng minh : Với mọi tập con $S \subseteq V\left(G(n,p)\right)$ với kích thước $t = \lfloor 2\log_2 n \rfloor + 1$; gọi X_S là biến ngẫu nhiên đặc trưng của tập S , có nghĩa là $X_S = 1$ nếu S là một clique và bằng 0 trong trường hợp ngược lại .
Khi đó , $E\left[X_S\right] = P[S \text{ là clique}] = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{t}{2}}$. Gọi X là số các clique với kích thước t trong đồ thị G .
Sử dụng tính tuyến tính của kì vọng ta thu được :

$$E(X) = E\left(\sum_{|S|=t} X_S\right) = \sum_{|S|=t} E(X_S) = \sum_{|S|=t} 2^{-\binom{t}{2}} = \binom{n}{t} 2^{-\binom{t}{2}} \le \frac{n^t}{t!}.\frac{1}{2^{\frac{t(t-1)}{2}}} = \frac{1}{t!}\left(\frac{n}{2^{\frac{t-1}{2}}}\right)^t \le \frac{1}{t!}\left(\frac{n}{n}\right)^t = \frac{1}{t!}$$

(trong đánh giá trên ta có sử dụng đến ước lượng $\binom{n}{t} = \frac{n(n-1).....(n-t+1)}{t!} \le \frac{n^t}{t!}$
Áp dụng bất đẳng thức Markov đối với biến ngẫu nhiên không âm X ta thu được đánh giá sau :
$P(X \ge 1) \le \frac{E(X)}{1} = \frac{1}{t!} \to 0$, khi $n \to \infty$. Từ đây ta dễ dàng suy ra vế đầu của điều phải chứng minh.
Lập luận tương tự ta cũng chỉ ra được rằng , đồ thị $G\left(n,\frac{1}{2}\right)$ không chứa một tập đỉnh độc lập kích thước $\lfloor 2\log_2 n \rfloor + 1$ với xác suất cao.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Các bài giảng trên internet
[2]. Po- Shen Loh , Graph Theory II, ??/??/2009
[3]. Trương Phước Nhân, Định lý Ramsey và các ứng dụng, 14/07/2017
[4]. Trương Phước Nhân, Định lý Turan và các hướng tiếp cận trong chứng minh, 15/07/2017
[5]. Trương Phước Nhân, Đồ thị ngẫu nhiên, 21/07/2017
[6].Ola Svensson, Topics in Theoretical Computer Science, 16/02/2015