Định lý Hall –Định lý Konig

Trương Phước Nhân, 24/07/2017

Định lý Hall:

Xét đồ thị lưỡng phân $G=(X\cup Y,E)$ với $G=X\cup Y$ là phân hoạch của tập đỉnh, trong đó các cạnh chỉ nối các đỉnh giữa hai lớp khác nhau của phân hoạch.

Một cặp ghép M của G là một tập các cạnh đôi một phân biệt , hiểu theo nghĩa không có đỉnh nào là đầu mút của hai hoặc nhiều hơn hai cạnh thuộc M .

Với $A\subseteq X$ ta đặt $N(A)=\{y\in Y:\exists x\in X,(x,y)\in E\}$. Một ghép cặp M được gọi là hoàn hảo từ X vào Y nếu nó phủ hết tất cả các đỉnh của tập X , một ghép cặp M được gọi là phủ đỉnh v nếu nó chứa một cạnh e sao cho $v\in e$.

Kết quả 1: (Hall)

Điều kiện cần và đủ để G có một ghép cặp hoàn hảo là $|N(A)|\geq|A|,\forall A\subseteq X$.

Chứng minh :

Điều kiện cần : Giả sử $\{(x,f(x));x\in X\}$ là một ghép cặp hoàn hảo từ X vào Y . Khi đó , dễ dàng nhận thấy rằng f là một đơn ánh từ tập X vào tập Y và do đó với mọi $A\subseteq X$ ta luôn có $|N(A)|\geq|f(A)|=|A|$

Điều kiện đủ : Giả sử $|X|=n$ và M , $|M|=m<n$, là một cặp ghép của G . Ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại một cặp ghép với $m+1$ cạnh.

Ta thực hiện tô màu các cạnh của cặp ghép M bởi màu đỏ và các cạnh còn lại bởi màu xanh. Bởi vì $|M|<|X|$ nên tồn tại một đỉnh không được phủ bởi cặp ghép M , ta tạm gọi là đỉnh x_0. Ta gọi đường đi P , xuất phát từ X , là luân phiên nếu cách cạnh được tô màu thay đổi luân phiên nhau : xanh, đỏ, xanh, đỏ,…

Gọi $X'\subseteq X$ và $Y'\subseteq Y$ là các tập đỉnh có thể đi đến được bởi một đường đi luân phiên bắt đầu tại đỉnh x_0. Ta sẽ chứng minh rằng Y' chứa một đỉnh y_0 không được phủ bởi cặp ghép M . Giả sử phản chứng , khi đó với mọi đỉnh $y\in Y'$ ta luôn tìm được cạnh $(g(y),y)$ được tô màu đỏ và hiển nhiên nếu $y\neq y'\in Y'$ thì $g(y)\neq g(y')$. Bây giờ nếu $y\in Y'$ thì $g(y)\in X'$, bởi vì một đường đi luân phiên bắt đầu từ x_0 khi đến y kết thúc bởi một cạnh tô màu xanh (một con đường có độ dài lẻ đều kết thúc tại Y) và nếu nó không chứa đỉnh $g(y)$ thì ta có thể bổ sung thêm cạnh $(g(y),y)$. Khi đó $|X'|\geq 1+|g(Y')|=1+|Y'|$, trong đó 1 đến từ việc $x_0\in X'$. Mặt khác ta nhận thấy rằng $N(X')\subseteq Y'$ (nếu $x\in X'$ và P là một đường đi luân phiên bắt đầu từ x_0 đến x và y là một lân cận của x nhưng không nằm trên P thì ta có thể mở rộng P bằng cách bổ sung thêm cạnh (x,y) (đường đi P kết thúc bởi một cạnh được tô màu đỏ vì các đường đi độ dài chẵn kết thúc tại X)) và sử dụng điều kiện Hall ta được :

$$|Y'|\geq\underbrace{|N(X')|\geq|X'|}_{Hall}\geq 1+|Y'|$$

Điều mâu thuẫn này chỉ ra sự tồn tại của đỉnh y_0.

Đặt $P:=(x_0,y_1,x_1,y_2,\ldots,x_k,y_{k+1}\doteq y_0)$ là một đường đi luân phiên bắt đầu tại đỉnh x_0 và kết thúc tại đỉnh y_0.

Cặp ghép $M':=M+(x_0,y_1)\cup\{(x_1,y_2)+\ldots+(x_k,y_{k+1})\}-\{(y_1,x_1)+\ldots+(y_k,x_k)\}$ có kích thước $m+1$.

(Khi ta tiến hành xây dựng từ cặp ghép M sang cặp ghép M' hai đỉnh x_0,y_0 sẽ được phủ chính xác một lần và các đỉnh còn lại của đường đi P được phủ bởi M thì các cạnh của cặp ghép liên thuộc với các đỉnh này được tiến hành thay thế nhưng vẫn đảm bảo chúng được phủ chính xác một lần các đỉnh của cặp ghép không nằm trên P không bị ảnh hưởng) .Từ lý luận ở trên ta suy ra điều phải chứng minh.

Cho một đồ thị $G=(V,E)$. $S\subseteq V$ được gọi là tập phủ đỉnh nếu với mọi cạnh $e=(x,y)$ của đồ thị G thì hoặc $x\in S$ hoặc $y\in S$ (hoặc là cả hai).

Nếu M là một cặp ghép của đồ thị G và S là một tập phủ đỉnh thì $|M|\leq|S|$

Kết quả 2: (Konig) Trong một đồ thị lưỡng phân bất kỳ ta luôn có

$$\max\{|M|:M \text{ là cặp ghép}\}=\min\{|S|:S \text{ là phủ đỉnh}\}$$

<u>Chứng minh :</u> Giả sử $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}, Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$ và $S=\{x_1,...,x_r,y_1,...,y_s\}$ là tập phủ đỉnh có kích thước nhỏ nhất. (nếu cần thiết ta có thể đánh số lại thứ tự các đỉnh)

Ta chứng minh tồn tại một cặp ghép với kích thước $r+s$ .Gọi H' là đồ thị con lưỡng phân của G cảm sinh trên $X'=\{x_1,x_2,...,x_r\}$ và $Y'=Y\setminus\{y_1,y_2,...,y_s\}=\{y_{s+1},y_{s+2},...,y_n\}$. Giả sử tồn tại $A\subseteq X'$ sao cho $|N_{H'}(A)|<|A|$. Ta có thể thu được một tập phủ đỉnh $N_{H'}(A)$ của G có kích thước nhỏ hơn A, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $|N_{H'}(A)|\ge|A|$. Sử dụng định lý Hall ta tìm được một cặp ghép M_1 từ X' vào Y'. Lập luận tương tự , ta cũng tìm được một cặp ghép M_2 từ $\{y_1,y_2,...,y_s\}$ vào $\{x_{r+1},x_{r+2},...,x_n\}$. Khi đó , cặp ghép $M:=M_1\cup M_2$ có kích thước $r+s$. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

<u>Lưu ý:</u> Một điều rất lí thú từ định lý Konig ta có thể chứng minh lại định lý Hall , hay nói cách khác hai kết quả này là tương đương với nhau , cái khác ở đây chỉ là cách mà ta phát biểu bài toán.

Cũng giống như trong phần chứng minh . Ta sẽ chỉ giải quyết chiều đảo của định lý Hall, có nghĩa là chỉ ra tính đúng đắn của khẳng định :

Nếu $|N(A)|\ge|A|, \forall A\subseteq X$ thì G có một cặp ghép hoàn hảo từ X vào Y

Thật vậy, giả sử phản chứng rằng không tồn tại cặp ghép hoàn hảo từ X vào Y . Sử dụng định lý Konig, tồn tại một tập phủ đỉnh C sao cho $|C|<|X|$ (do giả thiết phản chứng nên một cặp ghép từ X vào Y có kích thước lớn nhất $\le|X|-1$). Ta xem xét hai tập $C\cap X$ và $C\cap Y$, nhận thấy không có cạnh nối giữa $X\setminus C$ và $Y\setminus C$ (vì nếu ngược lại ta sẽ tìm được một cạnh trong đồ thị có hai đầu không nằm trong C, mâu thuẫn với tính phủ đỉnh) , do đó $N(X\setminus C)\subset C\cap Y$. Nhưng khi đó :

$$|N(X\setminus C)|\le|C\cap Y|=|C|-|C\cap X|<|X|-|C\cap X|=|X\setminus C| .$$

Điều này thuẫn với điều kiện Hall. Từ đây suy ra tính đúng đắn của khẳng định.

Ứng dụng :

Bài toán 1: (Sperner) Cho X là một tập hữu hạn và F là họ hữu hạn các tập con của X sao cho không có tập con nào thuộc F nằm trong một thành viên khác của họ, có nghĩa là không tồn tại $A,B\in F$ sao cho $A\subset B$. Chứng minh $|F|\le\binom{|X|}{\left\lfloor\frac{|X|}{2}\right\rfloor}$.

(xem thêm về bài viết **<u>“ Tối ưu tập hợp”</u>** để tìm hiểu thêm về cách tiếp cận xác suất cho vấn đề này)

Chứng minh : Đặt 2^X là họ tất cả các tập con của X và $\binom{X}{k}$ là họ tất cả các tập con của X với k phần tử. Ta xem 2^X như tập đỉnh của một đồ thị ta nối hai đỉnh $A,B\in 2^X$ lại với nhau nếu $|A\Delta B|=1$, trong đó $A\Delta B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$ là hiệu đối xứng , điều này có nghĩa là một trong hai tập bằng tập còn lại bổ sung thêm một phần tử.

Ta xét đồ thị con lưỡng phân cảm sinh từ đồ thị nêu trên lên hai tập $\binom{X}{k}$ và $\binom{X}{k+1}$ với $k<\frac{|X|}{2}$. Từ nhận xét ở phần trên ta nhận thấy rằng có cạnh nối giữa $A\in\binom{X}{k}$ và $B\in\binom{X}{k+1}$ nếu $A\subset B$. Ta sẽ chứng minh rằng điều kiện Hall thỏa mãn với đồ thị lưỡng phân này : $|N(U)|\ge|U|, \forall U\subseteq X$ .Thật vậy, sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách : đếm số các bộ $\left\{(A,B): A\in U\subset\binom{X}{k}, B\in\binom{X}{k+1}, A\subset B\right\}$

Cách 1: Với mỗi $A\in U$ liên hợp với $|X|-k$ tập $B\in\binom{X}{k+1}$ sao cho $A\subset B$. Có $(|X|-k)|U|$ bộ.

Cách 2: Với mỗi $B\in N(U)\subset\binom{X}{k+1}$ liên hợp với $k+1$ tập $A\in\binom{X}{k}$ sao cho $A\subset B$. Có $\le(k+1)|N(U)|$ bộ.

Từ đây ta suy ra hệ thức : $(|X|-k)|U| \le (k+1)|N(U)| \Rightarrow |N(U)| \ge \frac{|X|-k}{k+1}|U| \ge |U|$ (bởi vì $k < \frac{|X|}{2}$).

Theo định lý Hall : tồn tại một cặp ghép hoàn hảo từ $\binom{X}{k}$ vào $\binom{X}{k+1}$.

Lập luận tương tự cho trường hợp $k > \frac{|X|}{2}$, tồn tại một cặp ghép hoàn hảo từ $\binom{X}{k+1}$ vào $\binom{X}{k}$.

Bằng cách tổng hợp các cặp ghép giữa các tập $\binom{X}{0}, \binom{X}{1}, ..., \binom{X}{|X|}$ ta vừa chỉ ra ở trên ta thu được một hệ đường đi phân biệt. Để thuận tiện ta sẽ chỉ gọi là đường đi thay vì đường đi thuộc hệ.

Nhận xét 1: Theo cách ta xây dựng trên thì nếu hai đỉnh A, B nằm trên cùng một đường đi thì $A \subset B$ hoặc $B \subset A$.

Công việc tiếp theo của ta là đi tìm một chặn trên cho số lớn nhất có thể có các đường đi.

Nhận xét 2: Mỗi đỉnh thuộc 2^X đều nằm trên chính xác một đường đi thuộc hệ và mỗi đường đi chứa tối đa một đỉnh thuộc $\binom{X}{\left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor}$ nên có tối đa là $\binom{|X|}{\left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor}$ đường đi.

Kết hợp với nhận xét 1 trên thì ta suy ra $|F| \le \binom{|X|}{\left\lfloor \frac{|X|}{2} \right\rfloor}$, đpcm

Bài toán 2: Chứng minh rằng : Nếu $G = (X \cup Y, E)$ là một đồ thị lưỡng phân sao cho $|N(S)| \ge |S| - d \ \forall S \subset X$ thì G có một cặp ghép từ X vào Y với kích thước $\ge |X| - d$.

Lời giải : Ta thực hiện bổ sung thêm d đỉnh mới vào tập Y nối mỗi đỉnh mới này với tất cả các đỉnh nằm trong X ta thu được một đồ thị lưỡng phân mới, ta tạm gọi là G'.Thì ta nhận thấy ngay rằng :

$$|N_{G'}(S)| \ge |S| \ \forall S \subset X$$

(bởi vì tập S có tối thiểu là $|S| - d$ lân cận trong đồ thị G và cộng thêm với d đỉnh mới bổ sung thêm thì số lân cận của tập S trong G' tối thiểu là $|S|$). Sử dụng định lý Hall ta tìm được một cặp ghép hoàn hảo từ X vào Y . Ta tiến hành loại bỏ đi các cạnh của cặp ghép liên thuộc với các đỉnh mới , có tối đa là d cạnh như vậy. Do đó ta luôn tìm được một cặp ghép từ X vào Y với kích thước $\ge |X| - d$.

Bài toán 3: Cho $A_1, A_2, ..., A_n$ là họ các tập con của tập hữu hạn A và cho trước các số tự nhiên $d_1, d_2, ..., d_n$. Chứng minh rằng :Điều kiện cần và đủ để tồn tại các tập $D_i \subset A_i$ sao cho $|D_i| = d_i$ với mọi $1 \le i \le n$ là $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \ge \sum_{i \in I} d_i, \forall I \subset \{1, 2, ..., n\}$

Lời giải : Mỗi tập A_i có dạng $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{it_i}\}$ với $1 \le i \le n$ .Ta tiến hành xây dựng đồ thị lưỡng phân $G = (X \cup Y, E)$ trong đó $X = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_{ij} : 1 \le j \le d_i\}$, $Y = A$ ta nối đỉnh $a_{ij} \in X$ với $a \in A$ nếu và chỉ nếu $a \in A_i$.

Khi đó việc tồn tại các tập $D_i \subset A_i$ sao cho $|D_i| = d_i$ với mọi $1 \le i \le n$ tương đương với việc tồn tại một cách ghép cặp từ X vào Y. Điều kiện $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| \ge \sum_{i \in I} d_i, \forall I \subset \{1, 2, ..., n\}$ tương đương với $|N(S)| \ge |S|, \forall S \subseteq X$

(phép chứng minh của sự kiện này không quá khó nhưng viết ra cụ thể khá là dài dòng và chồng chéo nhiều kí hiệu , sẽ đơn giản hơn nếu như ta minh họa hình ảnh cho vấn đề và khi đó tính tương đương là hiển nhiên)

Từ định lý Hall ta suy ra điều phải chứng minh.

Bài toán 4: Cho một ma trận với các phần tử là các số được chọn tùy ý. Một " đường thẳng" trên ma trận là một hàng hoặc một cột của ma trận . Chứng minh rằng : số nhỏ nhất các đường thẳng cần thiết để phủ các phần tử khác không của ma trận bằng với số lớn nhất các phần tử khác không sao cho không có hai phần tử nào nằm trên cùng một đường thẳng.

Lời giải : Ta tiến hành xây dựng đồ thị lưỡng phân $G=\left(X\cup Y,E\right)$ trong đó X là tập các hàng tương ứng của ma trận , và Y là tập các cột tương ứng của ma trận , ta nối hai đỉnh của đồ thị bằng một cạnh nếu hai đường thẳng tương ứng có giao là một phần tử khác không.

Khi đó : Số nhỏ nhất các đường thẳng cần thiết để phủ các phần tử khác không là số phần tử nhỏ nhất của tập phủ đỉnh, số lớn nhất các phần tử khác không sao cho hai phần tử bất kì không nằm trên cùng một đường thẳng tương ứng với kích thước lớn nhất của cặp ghép. Kết quả trong bài toán được suy ra từ định lý Konig.

Tài liệu tham khảo:

Các bài giảng trên internet