

Các bài toán về giao của một họ tập –phần 1

Trương Phước Nhân , 25/07/2017

Siêu lọc và tính Helly

Một siêu lọc trên một tập X là một họ F gồm các tập con thỏa mãn hai điều kiện sau :

i) Nếu $A \in F, A \subset B$ thì $B \in F$

ii) Có chính xác một trong hai tập A hoặc $\bar{A}$ (kí hiệu phần bù của tập A trong X) nằm trong họ F .

Một họ F gọi là có *tính chất giao* nếu hai thành viên bất kì của họ có giao khác rỗng.

Tính chất 1: Mọi siêu lọc đều là họ có tính chất giao, và một họ có tính chất giao bất kì đều được chứa trong một siêu lọc.

Chứng minh:

Khẳng định 1: Mọi siêu lọc đều là họ có tính chất giao

Chứng minh khẳng định 1:

Thật vậy, gọi F là một siêu lọc. Nếu tồn tại hai thành viên A, B phân biệt (ở đây ta hiểu theo nghĩa là hai tập này có phần giao bằng rỗng) thì phần bù $\bar{B}$ sẽ chứa A , do đó $\bar{B}$ nằm trong F theo i). Nhưng điều này lại mâu thuẫn với ii) vì F không thể chứa đồng thời B và $\bar{B}$.

Khẳng định 2: Một họ có tính chất giao bất kì đều được chứa trong một siêu lọc

Chứng minh khẳng định 2:

Chọn một họ có tính chất giao bất kì. Ta tiến hành mở rộng họ này để nhận được một siêu lọc theo cách sau. Nếu có một tập không nằm trong họ và việc bổ sung thêm tập này vẫn đảm bảo cho tính chất giao thì ta thêm tập này vào họ. Sau đó ta bổ sung thêm tất cả các tập con có chứa ít nhất một thành viên vào họ .

Ta chứng minh rằng họ F thu được theo cách trên là một siêu lọc. Thật vậy, giả sử phản chứng tồn tại một tập A sao cho cả A và $\bar{A}$ đều không thuộc họ F . Thì theo cách ta xây dựng thì tập A phải phân biệt với ít nhất một thành viên B thuộc họ F và do đó B được chứa trong $\bar{A}$. Điều mâu thuẫn này chỉ ra sự đúng đắn của cách mở rộng. Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Ta nhắc lại một kết quả quen thuộc của Helly trong hình học tổ hợp :

“ Trong không gian Euclid $\mathbb{R}^k$ cho $n \geq k+1$ tập lồi sao cho $k+1$ tập lồi có giao khác rỗng thì tất cả n các tập lồi này phải có một điểm chung ”

Với một họ các tập con bất kì (không nhất thiết là lồi) ta có một kết quả sau về tính Helly :

Kết quả 2: Cho F là một họ và k là kích thước của thành viên nhỏ nhất của họ F . Nếu $k+1$ thành viên bất kì đều có giao khác rỗng thì tồn tại một phần tử nằm trong tất cả các thành viên của họ.

Chứng minh: Giả sử phản chứng rằng giao của tất cả các thành viên của họ F là tập rỗng và ta chọn ra một thành viên $A = \{x_1, \dots, x_k\} \in F$. Theo giả thiết phản chứng thì với mỗi phần tử $x_i, i=1, k$ ta luôn tìm được một thành viên B_i sao cho $x_i \notin B_i$. Do đó $A \cap B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n = \emptyset$, điều này mâu thuẫn với tính Helly. Ta suy ra điều phải chứng minh.

Họ giao tối đại

Cho F là một họ k – đều các tập con (từ k – đều ở đây hiểu theo nghĩa là các thành viên của họ đều có k phần tử , xem thêm các bài tiếp **“Các bài toán về tập hợp”, “Tối ưu tập hợp-phần 1”, “Design”** và **“Mô hình Design- Tập difference”** thuộc về chủ đề tập hợp) của một n – tập.

Ta gọi họ F là có *giao tối đại* nếu như :

i) F là họ có tính chất giao

ii) Nếu ta bổ sung thêm bất kì một k – tập mới vào họ F sẽ vi phạm tính chất giao , có nghĩa là với mọi $A \notin F$ và $|A|=k$ họ $F \cup \{A\}$ không có tính chất giao.

Trong trường hợp $n \leq 2k-1$ thì họ giao tối đại là họ gồm tất cả các k – tập con. Thật vậy, xét hai k – tập bất kì A, B thì $|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| \geq k + k - n \geq 2k - (2k - 1) = 1$ nên một họ gồm các k – tập con tập con bất kì luôn có tính chất giao. Giả sử F là họ tối đại nhưng không chứa tất cả các k – tập con thì ta tìm được một k – tập con A không nằm trong F , theo định nghĩa của tính giao tối đại thì $F \cup \{A\}$ không có tính chất giao nên tồn tại k – tập con B sao cho $A \cap B = \emptyset$, điều này mâu thuẫn với tính chất vừa chỉ ra. Từ đây suy ra điều cần khẳng định.

Ta chỉ cần xét trường hợp $n \geq 2k$. Đặt $f(k) :=$ số n nhỏ nhất có thể có để tồn tại một họ tối đại k – đều.

Ta đưa ra một đánh giá cận trên thô cho $f(k)$ như sau : Xét họ F gồm tất cả các đường thẳng của mặt phẳng xạ ảnh có bậc bằng $k-1$ (xem bài viết **“Các bài toán về tập hợp”, “Designs”, “Bài toán thực tế và lý thuyết trường hữu hạn”** trình bày về cơ sở lý thuyết , các tính chất và ứng dụng của mặt phẳng xạ ảnh) thì khi đó ta biết rằng $|F| = n = k^2 - k + 1$, lưu ý rằng theo định nghĩa của mặt phẳng xạ ảnh thì mỗi đường thẳng là một k -tập con và hai đường thẳng bất kì luôn giao nhau tại một điểm (hay nói cách khác F là họ có tính chất giao). Ta cần chứng minh tính tối đại của họ F bằng khẳng định sau: “Nếu A là một k - tập con có giao với tất cả các đường thẳng thì A là một đường thẳng”. Thật vậy, với hai điểm phân biệt bất kì $x, y \in A$ ta có thể xác định được một đường thẳng $l \in F$ đi qua cả hai điểm này. Giả sử phản chứng A không phải là một đường thẳng thì ta có tìm được điểm $z \in l \setminus \{x, y\}$ nhưng $z \notin A$. Theo các kết quả về mặt phẳng xạ ảnh thì có k đường thẳng phân biệt đi qua z và chúng giao với A tại k giao điểm $a_1, a_2, \dots, a_k$ (lưu ý rằng $z \notin A$ nên $a_i \neq z, \forall i$, theo tính chất của mặt phẳng xạ ảnh $a_i \neq a_j (i \neq j)$) mà A là k - tập nên $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Nhưng hai điểm $x, y \in A$ nên đường thẳng đi qua x, z phải khác với đường thẳng đi qua y, z , điều này mâu thuẫn với tính thẳng hàng của x, y, z (ở đây thẳng hàng hiểu theo nghĩa cùng nằm trên một đường thẳng).

Từ các lập luận trên ta suy ra rằng : $f(k) \leq k^2 - k + 1$ với tất cả các giá trị k sao cho tồn tại mặt phẳng xạ ảnh bậc $k-1$.

Kết quả 3: (Furedi) Cho F là một họ tối đại các k -tập con của một n -tập .

Nếu $2k \leq n \leq \frac{k^2}{1+2\ln k}$ thì số thành viên của họ F phải lớn hơn k^2 .

Chứng minh: Ta thực hiện đánh giá số N các bộ (A, B) , trong đó A là một thành viên của họ F còn B là một k -tập con phân biệt với A (hiểu theo nghĩa là $A \cap B = \emptyset$) theo hai hướng khác nhau :

Cách 1: Mỗi tập B không có giao với ít nhất một thành viên của họ F , $N \geq \binom{n}{k} - |F|$ (tính tối đại của họ F)

Cách 2: Mỗi thành viên $A \in F$ không có giao với tối đa $\binom{n-k}{k}$ tập B , $N \leq |F| \cdot \binom{n-k}{k}$

(do $A \cap B = \emptyset$ nên $B \subset \bar{A}$)

Từ đây ta thu được đánh giá : $|F| \geq \frac{\binom{n}{k}}{1 + \binom{n-k}{k}}$

$$\geq \frac{\frac{n^k}{k^k}}{1 + \frac{(n-k)^k}{k!}} = \frac{n^k}{(n-k)^k} \left(\frac{\frac{1}{k^k}}{\frac{1}{(n-k)^k} + \frac{1}{k!}} \right) \geq \frac{n^k}{(n-k)^k} \left(\frac{\frac{1}{k^k}}{\frac{1}{k^k} + \frac{1}{k!}} \right)$$

(Lưu ý đến các đánh giá $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ xem lại bài **“Phương pháp xác suất”** và đánh giá

$$\frac{n^k}{k^k} = \frac{n}{k} \cdot \frac{n}{k} \cdots \frac{n}{k} \leq \frac{n}{k} \cdot \frac{n-1}{k-1} \cdots \frac{n-k+1}{1} = \binom{n}{k})$$

$$\Rightarrow |F| \geq \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{n}{n-k} \right)^k}_{0 \leq x < n-k: \left(\frac{n}{n-k} \right)^x \geq e^{\frac{k}{n-k}x}} > e^{\frac{k^2}{n}-1} \geq e^{2\ln k} = k^2 .$$

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Stasys Jukna , Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science, Second Edition.
- [2]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về tập hợp, 12/07/2017
- [3]. Trương Phước Nhân, Designs, 22/07/2017