Số Schur

Trương Phước Nhân, 26/07/2017

Bài toán :(Schur) Với mọi số nguyên n, ta đặt $S(n)$ là số nguyên dương lớn nhất để ta có thể phân hoạch tập $\{1,2,...,S(n)\}$ thành n tập con sao cho với bộ 3 số a,b,c thuộc cùng một tập con (không nhất thiết phân biệt) ta luôn có $a+b\neq c$. Chứng minh rằng $S(n)\geq \frac{1}{2}(3^n-1)$

Lưu ý : Số Schur luôn tồn tại và $S(n)\leq \lfloor en!\rfloor$ xem thêm bài viết **"Nguyên lý chuồng bồ câu"**, **"Phương pháp Ramsey và các ứng dụng"** để nắm bắt rõ về vấn đề này.

Chứng minh: Để chứng minh đánh giá trong bài toán ta phải đưa ra một phép phân hoạch thỏa mãn yêu cầu đề bài cho tập $\left\{1,2,...,\frac{1}{2}(3^n-1)\right\}$ bằng đệ qui. Ta cần đến bổ đề sau :

Bổ đề : Nếu $\{1,2,...,k\}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_t$ là một phân hoạch thỏa mãn điều kiện bài toán thì phân hoạch $\{1,2,...,3k+1\}=A_1'\cup A_2'\cup...\cup A_t'\cup A_{t+1}'$ cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán, trong đó $A_i'=A_i\cup(A_i+(2k+1)),i=\overline{1,t}$ và $A_{t+1}'=\{k+1,k+2,...,2k+1\}$

(xem thêm bài tiếp **" Mô hình Design và tập Difference"** có đề cập đến các kí hiệu sử dụng trong bổ đề)

Chứng minh bổ đề :

Ta nhận thấy rằng $A_i\subset\{1,2,...,k\}$ với $i=\overline{1,t}$ nên $A_i+(2k+1)\subset\{2k+2,2k+3,...,3k+1\}$ với $i=\overline{1,t}$. Từ giả thiết $A_i\cap A_j=\varnothing(1\leq i<j\leq t)$ ta suy ra $(A_i+(2k+1))\cap(A_j+(2k+1))=\varnothing(1\leq i<j\leq t)$ nên $A_i'\cap A_j'=\varnothing(1\leq i<j\leq t)$.

Đầu tiên, ta cần chứng minh $A_1',A_2',...,A_t',A_{t+1}'$ là một phân hoạch của $\{1,2,...,3k+1\}$, $A_i'\cap A_{t+1}'=\varnothing(1\leq i\leq t)$ (do $A_i'=A_i\cup(A_i+(2k+1))\subset\{1,2,...,k\}\cup\{2k+2,...,3k+1\}$ với $i=\overline{1,t}$) kết hợp với nhận xét ở phần đầu của chứng minh ta suy ra $A_i'\cap A_i'=\varnothing$.

Tiếp theo, do $A_1\cup A_2\cup...\cup A_t=\{1,2,...,k\}$ nên $(A_1+(2k+1))\cup(A_2+(2k+1))\cup...\cup(A_t+(2k+1))=\{2k+2,...,3n+1\}$. Do đó :

$$A_1'\cup A_2'\cup...\cup A_t'\cup A_{t+1}'=\{1,2,...,3k+1\}$$ (lưu ý rằng $A_{t+1}'=\{k+1,k+2,...,2k+1\}$)

$\Rightarrow A_1',A_2',...,A_t',A_{t+1}'$ thật sự là một phân hoạch của $\{1,2,...,3k+1\}$.

Sau cùng ta chứng minh rằng phần hoạch này thỏa yêu cầu của đề bài. Xét hai số a,b nằm trong cùng một tập con của phân hoạch.

1) Nếu $a,b\in A_{t+1}'$ thì $k+1\leq a,b$. Do đó : $2k+2\leq a+b$ nên $a+b\in A_{t+1}'$

2) Nếu $a,b\in A_i'$ $(1\leq i\leq t)$ thì a,b hoặc thuộc A_i hoặc thuộc $A_i+(2k+1)$. Giả sử a,b cùng thuộc A_i thì $a+b\notin A_i$ (theo giả thiết) . Tương tự cho a,b cùng thuộc $A_i+(2k+1)$. Do đó không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $a\in A_i$ còn $b\in A_i+(2k+1)$ nên tồn tại $b'\in A_i$ sao cho $b=b'+(2k+1)$. Nếu $a+b\in A_i'$ thì $a+b\in A_i+(2k+1)$ (bởi vì $a+b\in A_i$ dẫn đến $a+b<b$,vô lí) nên tồn tại $c\in A_i$ sao cho $a+b=c'+2k+1$. Điều này dẫn đến $a+b'=c'$, mâu thuẫn này chỉ ra rằng $a+b\notin A_i'$ kết thúc chứng minh của bổ đề.

Trở lại với vấn đề ban đầu. Hiển nhiên ta nhận ra rằng $\{1\}$ là phân hoạch gồm 1 lớp thỏa mãn yêu cầu bài toán bài toán. Áp dụng bổ đề ta suy ra tập $\{1,2,3,4\}$ có thể phân hoạch thành 2 lớp thỏa mãn yêu cầu bài toán; áp dụng bổ đề ta lại suy ra tiếp tập $\{1,2,...,13\}$ có thể phân hoạch thành 3 lớp thỏa mãn đề bài,…. Bằng một phép qui nạp đơn giản với việc kết hợp thêm bổ đề ta nhận ra rằng tập $\left\{1,2,...,\frac{1}{2}(3^n-1)\right\}$ có thể phân hoạch thành n lớp thỏa mãn yêu cầu bài toán. Từ định nghĩa của số $S(n)$ suy ra $S(n)\geq\frac{1}{2}(3^n-1)$.

Tài liệu tham khảo:

[1].Wikipedia
[2]. Trương Phước Nhân , Nguyên lý chuồng bồ câu , 09/07/2017
[3]. Trương Phước Nhân , Định lý Ramsey và các ứng dụng , 14/07/2017
[4]. Ronald L. Graham, Bruce L.Rothschild, Joel H. Spencer, Ramsey Theory, Second Edition