

Định lý Menger

Trương Phước Nhân, 19/08/2017

Cho $G = (V, E)$ là một đồ thị định hướng. Gọi $a = v_0, v_1, \dots, v_k = b$ và $a = w_0, w_1, \dots, w_l = b$ là hai đường đi trong G xuất phát từ đỉnh a đến đỉnh b . Hai đường đi được gọi là phân biệt nếu $v_i \neq w_j$ với $i = 1, 2, \dots, k-1$ và $j = 1, 2, \dots, l-1$. Một tập đỉnh S được gọi là tách đỉnh a với đỉnh b nếu với mọi đường đi từ đỉnh a đến đỉnh b chứa ít nhất một đỉnh thuộc tập S .

Bài toán : (Menger) Cho a, b là hai đỉnh của một đồ thị định hướng $G = (V, E)$ sao cho $(a, b) \notin E$.

Gọi m là số tối đa các đường đi phân biệt từ đỉnh a đến đỉnh b và l là kích thước tối thiểu của một tập đỉnh S tách a với b sao cho $S \cap \{a, b\} = \emptyset$. Khi đó : $l = m$

Chứng minh : Để thuận tiện trong việc trình bày chứng minh của định lý Menger ta sẽ nói S là tập tách thay vì phải nói S tách đỉnh a với đỉnh b . Ta chứng minh khẳng định của bài toán bằng qui nạp theo l trong trường hợp $l \geq 1$.

Với $l = 0$. Khi đó không có tập đỉnh S nào tách đỉnh a với đỉnh b sao cho $S \cap \{a, b\} = \emptyset$ nên không có đường đi nào xuất phát từ đỉnh a đến đỉnh b .

Nhận xét : $l \geq m$. Thật vậy, mỗi tập đỉnh S tách a với b nhưng không chứa hai đỉnh a và b chứa ít nhất một đỉnh từ mỗi đường đi phân biệt từ a đến b nên $|S| \geq m$.

Từ nhận xét trên nhận thấy rằng chỉ cần chứng minh $m \geq l$.

Với $l = 1$. Khi đó ta tìm được một đỉnh u khác a, b sao cho tập $S = \{u\}$ tách a với b nên có ít nhất một đường đi từ a đến b hay $m \geq 1$ nên $m = l = 1$.

Giả sử khẳng định của bài toán đã được kiểm chứng với các giá trị $\leq l-1$. Giả sử phản chứng khẳng định của bài toán sai với giá trị l hay nói cách khác ta tìm được một đồ thị định hướng G có hai đỉnh a, b $(a, b) \notin E(G)$ sao cho có tối đa $l-1$ đường đi phân biệt từ a đến b và kích thước tối thiểu của một tập tách S $S \cap \{a, b\} = \emptyset$ bằng l . Trước khi đi vào phần chính của chứng minh ta có một số quan sát sau :

Khẳng định 1: Với mọi $v \in V \setminus \{a, b\}$ hoặc là $(a, v) \notin E(G)$ hoặc là $(v, b) \notin E(G)$.

Thật vậy, nếu a, v, b tạo thành một đường đi trong G thì v nằm trong một tập tách S thỏa $S \cap \{a, b\} = \emptyset$.

Do đó, $S' = S \setminus \{v\}$ tách a với b trong đồ thị $G' = G \setminus \{v\}$.

Ngược lại, nếu S' tách a với b trong đồ thị G' thì $S' \cup \{v\}$ tách a với b trong đồ thị G .

Do đó, $|S'| \geq l-1$ và dấu “=” xảy ra với một số tập tách nào đó nằm trong G' .

Sử dụng giả thiết qui nạp, đồ thị G' chứa $l-1$ đường đi phân biệt từ a đến b và các đường đi này cùng với đường đi a, v, b cho ta l đường đi phân biệt từ a đến b trong đồ thị G , điều này mâu thuẫn với giả thiết.

Khẳng định 2: Nếu S là một tập tách tối thiểu, có nghĩa là $|S| = l$, trong đồ thị G và $S \cap \{a, b\} = \emptyset$ thì với mọi $s \in S$ hoặc là $(a, s) \in E(G)$ hoặc là $(s, b) \in E(G)$.

Thật vậy, đặt $P(a, S)$ là tập tất cả các đường đi trong đồ thị G xuất phát từ a kết thúc tại một đỉnh $s \in S$ và không có đỉnh trung gian nằm trên S ; $P(S, b)$ là tập tất cả các đường đi trong đồ thị G xuất phát từ một đỉnh $s \in S$ kết thúc tại b và không có đỉnh trung gian nằm trên S . Do S là một tập tách, với mọi đường đi từ a đến b trong đồ thị G chứa ít nhất một đỉnh nằm trong S nên đường đi này có phần đầu nằm trong $P(a, S)$ và phần cuối nằm trong $P(S, b)$. Sử dụng tính tối thiểu của tập S ta suy ra với mỗi $s \in S$ có một đường đi từ a đến s và từ s đến b .

Gọi $I(a, S)$ là tập hợp tất cả các đỉnh trung gian của các đường đi nằm trong $P(a, S)$; $I(S, b)$ là tập hợp tất cả các đỉnh trung gian của các đường đi nằm trong $P(S, b)$.

Khẳng định 2.1: $I(a, S) \cap I(S, b) = \emptyset$

Thật vậy, nếu $I(a, S) \cap I(S, b) \neq \emptyset$ thì tồn tại một đỉnh $c \in I(a, S) \cap I(S, b)$ sao cho có một đường đi từ a đến c không có các đỉnh trung gian nằm trong S và một đường đi từ c đến b không có các đỉnh trung gian nằm trong S . Bằng cách nối hai đường đi này lại với nhau ta thu được một đường đi từ a đến b không có đỉnh trung gian nằm trong S , mâu thuẫn với tính tách của tập S .

Khẳng định 2.2: $I(a, S) = \emptyset$ hoặc $I(S, b) = \emptyset$.

Thật vậy, nếu cả hai tập $I(a, S)$ và $I(S, b)$ đều khác rỗng thì ta xét đồ thị $H = (V(H), E(H))$ xác định bởi :

$$V(H) = \{a\} \cup S \cup I(S, b) \cup \{b\} = \{a\} \cup \{v \in V : v \text{ nằm trên một đường đi thuộc } P(S, b)\}$$

$$\text{và } E(H) = \{(a, s) : s \in S\} \cup \{(v, v') \in E : (v, v') \text{ nằm trên một đường đi nằm thuộc } P(S, b)\}$$

Do $I(a, S) \cap I(S, b) = \emptyset$ (theo khẳng định 2.1) và $I(a, S) \neq \emptyset$ suy ra $I(a, S) \cap V(H) = \emptyset$ nên $|V(H)| < |V(G)|$.

Gọi T là một tập tách trong đồ thị H và giả sử $a, b \notin T$. Gọi π là một đường đi từ a đến b trong G và π' là phần sau của đường đi này nằm thuộc $P(S, b)$. Khi đó π' là một đường đi từ một đỉnh $s \in S$ đến b .

Theo cách ta xây dựng thì (a, s) là một cạnh nằm trong H , bằng cách nối (a, s) với đường đi π' ta thu được một đường đi từ a đến b nằm trong H . Do T là tập tách trong H nên T chứa một đỉnh trung gian của đường đi này suy ra hoặc $s \in T$ hoặc có một đỉnh trung gian của π' nằm trong T . Suy ra T tách a với b trong G nên $|T| \geq l$. Do $|V(H)| < |V(G)|$, bằng cách sử dụng giả thiết quy nạp ta suy ra có l đường đi phân biệt từ a đến b nằm trong H . Nói theo một cách khác, với mỗi đỉnh $s \in S$ tồn tại một đường đi $\pi_2(s) \in P(S, b)$ từ s đến b sao cho l đường đi $\pi_2(s)$ phân biệt nhau.

Lập luận tương tự, với mỗi $s \in S$ tồn tại một đường đi $\pi_1(s) \in P(a, S)$ từ a đến s sao cho l đường đi $\pi_1(s)$ là phân biệt nhau. Bằng cách nối các đường đi $\pi_1(s)$ với các đường đi $\pi_2(s)$ ta thu được l đường đi phân biệt từ a đến b trong G , điều này mâu thuẫn với giả thiết về đồ thị G .

Từ khẳng định 2.2 ta suy ra khẳng định 2.

Tiếp theo ta đến với đoạn chứng minh qui nạp : Xét tập các đồ thị G thỏa mãn tính chất nêu trong giả thiết phản chứng sao cho số các đỉnh là nhỏ nhất có thể. Trong tập hợp này ta chọn ra một đồ thị có số các cạnh nhỏ nhất, ta cũng gọi đồ thị này là $G = (E(G), V(G))$. Gọi e là một cạnh bất kì, ta xét đồ thị

$G' = G \setminus \{e\} := (V(G), E(G) \setminus \{e\})$. Dễ dàng nhận thấy có tối đa $l-1$ đường đi phân biệt từ a đến b trong G' , do G' là một đồ thị con của G . Đặt $S(e)$ là tập tách trong G' không chứa hai đỉnh a, b và có kích thước nhỏ nhất. Sử dụng tính chất tối thiểu của đồ thị G ta suy ra tập $S(e)$ chứa tối đa $l-1$ phần tử. Nếu $e = (v_1, v_2)$ với $v_1 \neq a$ thì $S(e) \cup \{v_1\}$ là một tập tách trong đồ thị G , bởi vì một đường đi bất kì từ a đến b hoặc chứa một đỉnh thuộc $S(e)$ hoặc chứa cạnh e . Lập luận tương tự nếu $v_2 \neq b$ ta cũng thu được $S(e) \cup \{v_2\}$ tách a với b trong G .

Điều này suy ra rằng : $|S(e)| = l-1$.

Xét đường đi ngắn nhất từ a đến b nằm trong G và gọi a, v, v' là phần đầu của đường đi ngắn nhất này. Khi đó $v' \neq b$ (theo khẳng định 1). Bằng cách đặt $e = (v, v')$ ta suy $|S(e)| = l-1 \geq 1$ và $S(e) \cup \{v\}$ là một tập tách trong đồ thị G có kích thước bằng l . Do $(a, v) \in E(G)$ ta suy ra rằng $(s, b) \in E(G)$ với mọi $s \in S(e)$. Lập luận tương tự ta suy ra $S(e) \cup \{v'\}$ là một tập tách trong G . Nếu $(a, v') \in E(G)$ thì ta tìm được một đường đi ngắn hơn xuất phát từ a đến b , điều này mâu thuẫn với giả thiết. Do đó $(a, v') \notin E(G)$ ta suy ra $(v', b) \in E(G)$ (theo khẳng định 1 và 2) nên $(s, b) \in E(G)$ với mọi $s \in S(e)$, điều này mâu thuẫn với khẳng định 1. Kết thúc chứng minh.

Tài liệu tham khảo :

Melvyn B. Nathanson, Additive Number Theory – Inverse Problems and the Geometry of Sumsets ,First Edition.