Định lý Kovari – Sos – Turan

Trương Phước Nhân, 04/09/2017

Kết quả 1: $ex\left(n,K_{2,2}\right)\le\frac{n}{4}\left(1+\sqrt{4n-3}\right)$

Chứng minh : Khẳng định suy ra từ sự kiện $K_{2,2}=C_4$ và áp dụng một kết quả đã chỉ ra trong bài viết "**Tối ưu đồ thị -phần II**"

Kết quả 2: (Kovari – Sos – Turan) $ex\left(n,K_{t,t}\right)\le tn^{2-\frac{1}{t}}$

Chứng minh : Giả sử G là một đồ thị có n đỉnh, e cạnh và $K_{t,t}-free$. Để chứng minh khẳng định của bài toán ta sử dụng phương pháp đếm bằng hai cách số các đồ thị con $K_{1,t}$ như sau :

Cách 1: Với một đỉnh $x\in V\left(G\right)$ ta kí hiệu $d\left(x\right)$ là bậc của đỉnh x, hay nói cách khác $d\left(x\right)$ là số đỉnh liên thuộc với x, thì khi đó số các đồ thị con sao $K_{1,t}$ của G có tâm là đỉnh x bằng $\binom{d\left(x\right)}{t}$. Bằng cách này ta suy ra số các đồ thị con $K_{1,t}$ của G là $\sum_{x\in V(G)}\binom{d\left(x\right)}{t}$.

Cách 2: Với t đỉnh bất kì thì số các lân cận chung của t điểm này tối đa là $t-1$, nếu ngược ngược thì ta sẽ thu được một đồ thị con $K_{t,t}$. Do đó số các đồ thị con $K_{1,t}$ tối đa là $\left(t-1\right)\binom{n}{t}$.

Từ hai phân tích trên ta thu được : $\left(t-1\right)\binom{n}{t}\ge\sum_{x\in V(G)}\binom{d\left(x\right)}{t}$ (1)

Sử dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi $f\left(x\right)=\binom{x}{n}=\frac{x\left(x-1\right)...\left(x-n+1\right)}{n!}$ (việc kiểm tra tính lồi là tầm thường nên ta không trình bày) thu được : $\sum_{x\in V(G)}\binom{d\left(x\right)}{t}\ge n\binom{\frac{\sum_{x\in V(G)}d\left(x\right)}{n}}{t}=n\binom{\frac{2e}{n}}{t}$ (3)

Ta dễ dàng chứng minh được các đánh giá phụ sau : $\frac{\left(a-b\right)^b}{b!}\le\binom{a}{b}=\frac{a\left(a-1\right).....\left(a-b+1\right)}{b!}\le\frac{a^b}{b!}$

Kết hợp đánh giá phụ ở trên với các kết quả (1) và (2) ta suy ra :

$$n\frac{\left(\frac{2e}{n}-t\right)^t}{t!}\le n\binom{\frac{2e}{n}}{t}\le\left(t-1\right)\binom{n}{t}<t\frac{n^t}{t!}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{2e}{n}-t\right)^t\le tn^{t-1}$$

$$\Rightarrow e\le\frac{1}{2}t^{\frac{1}{t}}n^{2-\frac{1}{t}}+\frac{1}{2}tn\le tn^{2-\frac{1}{t}}$$

Từ đây ta suy ra : $ex\left(n,K_{t,t}\right)\le tn^{2-\frac{1}{t}}$

Kết quả 3: $ex\left(n,K_{s,t}\right)\le\frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{s}}n^{2-\frac{1}{s}}+\frac{1}{2}sn$, trong đó $s\le t$

Chứng minh : Tương tự như kết quả 2, ta thực hiện đếm bằng hai cách số các đồ thị con $K_{1,s}$ ta cũng thu được đánh giá : $\sum_{x\in V(G)}\binom{d\left(x\right)}{s}\le\left(t-1\right)\binom{n}{s}\le\left(t-1\right)\frac{n^s}{s!}$

Áp dụng bất đẳng thức Jensen cho hàm lồi ta thu được đánh giá :

$$\sum_{x\in V(G)}\binom{d(x)}{s}\geq n\binom{\dfrac{\sum\limits_{x\in V(G)}d(x)}{n}}{s}=n\binom{\dfrac{2e}{n}}{s}\geq n\frac{\left(\dfrac{2e}{n}-s\right)^s}{s!}$$

Kết hợp hai đánh giá trên ta suy ra : $\left(\dfrac{2e}{n}-s\right)^s\leq(t-1)n^{s-1}$

$$\Rightarrow e\leq\frac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{s}}n^{2-\frac{1}{s}}+\frac{1}{2}sn$$

Từ đây ta cũng suy ra : $ex\left(n,K_{s,t}\right)\leq\dfrac{1}{2}(t-1)^{\frac{1}{s}}n^{2-\frac{1}{s}}+\dfrac{1}{2}sn$

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine , 15/02/2011

[2]. David Conlon, Etremal graph theory.

[3]. Trương Phước Nhân, Tối ưu đồ thị - phần II, 17/07/2017