

Ngịch đảo Mobius trên poset

Trương Phước Nhân, Cần Thơ, 10/09/2017

Do $\zeta(x, x) = 1$ với mọi $x \in P$ nên theo kết quả 1) trong bài viết “Đại số liên thuộc” phần tử ζ khả nghịch ta kí hiệu phần tử khả nghịch này là μ

Kết quả 1: (Công thức nghịch đảo Mobius trên poset)

Cho P là một poset và K là một trường ; f, g là các ánh xạ từ P vào K .

Nếu $f(x) = \sum_{y \leq x} g(y)$ với mọi $x \in P$ thì $g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \mu(y, x)$

Chứng minh : Ta chuyển bài toán này sang mô hình ma trận : Đầu tiên, đồng nhất mỗi phần tử thuộc $I(P)$ với một ma trận có cấp $|P| \times |P|$ (xem lại bài viết “Đại số liên thuộc”), tiếp theo ta liên kết mỗi ánh xạ $f: P \rightarrow K$ với một vector cột $M(f)$ có $|P|$ cột được đánh số bởi các phần tử của poset P trong đó phần tử ở cột x là $f(x)$.

Khi đó điều kiện $f(x) = \sum_{y \leq x} g(y)$ với mọi $x \in P$ được viết lại theo ngôn ngữ ma trận có dạng

$$M(f) = M(g)M(\zeta).$$

Do μ là phần tử khả nghịch của ζ nên ta có $M(\zeta)M(\mu) = 1$ từ đó ta suy ra $M(f)M(\mu) = M(g)$, hay nói cách khác $g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \mu(y, x)$.

Cho trước hai poset $(P, \leq_P); (Q, \leq_Q)$ ta xác định quan hệ thứ tự $\leq_{P \times Q}$ trên tích Descartes $P \times Q$ như sau :

$$(x, x') \leq_{P \times Q} (y, y') \text{ khi } x \leq_P x' \text{ và } y \leq_Q y'$$

Kết quả 2:

$\mu_{P \times Q}((x, y), (x', y')) = \mu_P((x, x')) \mu_Q((y, y'))$ với $x, x' \in P$ và $y, y' \in Q$ trong đó $x \leq_P x'$ và $y \leq_Q y'$

Chứng minh :

Đặt $\mu'_{P \times Q}((x, y), (x', y')) = \mu_P((x, x')) \mu_Q((y, y'))$, bằng tính toán trực tiếp ta thu được :

$$\begin{aligned} \sum_{(x, y) \leq_{P \times Q} (u, v) \leq_{P \times Q} (x', y')} \mu'_{P \times Q}((x, y), (u, v)) &= \sum_{(x, y) \leq_{P \times Q} (u, v) \leq_{P \times Q} (x', y')} \mu_P((x, u)) \mu_Q((y, v)) \\ &= \left(\sum_{x \leq_P u \leq x'} \mu_P((x, u)) \right) \left(\sum_{y \leq_Q v \leq y'} \mu_Q((y, v)) \right) \\ &= \delta_{xx'} \delta_{yy'} \\ &= \delta_{(x, y)(x', y')} \end{aligned}$$

Đẳng thức trên chỉ ra rằng μ' là nghịch đảo của $\zeta_{P \times Q}$ nên $\mu_{P \times Q} = \mu'$

Tài liệu tham khảo :

Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine , 15/02/2011