



PHƯƠNG PHÁP NHÂN LƯỢNG LIÊN HỢP GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH VÔ TỈ

Lê Phúc Lữ¹²

Phương pháp nhân lượng liên hợp là một cách giải quen thuộc được áp dụng khá nhiều trong các bài toán giải phương trình và hệ phương trình vô tỉ. Cách giải đơn giản và hiệu quả này không những giúp ta tiếp cận bài toán theo hướng tự nhiên hơn mà còn giúp ta tự tạo được nhiều bài toán mới mẻ một cách dễ dàng, thông qua đó có thể tự rèn luyện thêm các kỹ năng cho mình. Trong bài viết này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu rõ hơn về phương pháp nhân lượng liên hợp cũng như những điều cần chú ý khi áp dụng nó.

1 Kiến thức cần nhớ và một số bài toán mở đầu

1.1 Kiến thức cần nhớ

Ở chương trình THCS, chúng ta đã khá quen thuộc với những bài toán về biến đổi biểu thức vô tỉ bằng cách dùng đại lượng phù hợp để khử căn nhằm làm xuất hiện nhân tử. Điều đó được thực hiện nhờ các hằng đẳng thức cơ bản sau³:

- $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) \Leftrightarrow a - b = \frac{a^2 - b^2}{a + b}.$
- $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \Leftrightarrow a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}.$
- $a^4 - b^4 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2) \Leftrightarrow a - b = \frac{a^4 - b^4}{(a + b)(a^2 + b^2)}.$
- ...
- $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$

Sử dụng ý tưởng này, trong các bài toán về phương trình và hệ phương trình, chúng ta có thể nhóm hoặc thêm bớt các đại lượng phù hợp vào các biểu thức chứa căn rồi làm xuất hiện các đa thức. Nhờ việc phân tích các đa thức đó thành nhân tử làm xuất hiện ra thừa số chung, ta

¹Sinh viên trường Đại học FPT, thành phố Hồ Chí Minh. Nickname **chienthan** ở Diễn đàn *Cùng nhau vượt Đại dương* <http://onluyenthoan.vn>.

²Bài viết được trình bày lại bằng chương trình soạn thảo LaTeX bởi **can_hang2007**. Đề nghị các bạn ghi rõ nguồn của <http://onluyenthoan.vn> khi đăng tải trên các trang web khác.

³Ở đây ta tạm hiểu là các biểu thức đã thỏa mãn điều kiện của phép chia.

đưa bài toán đã cho về các phương trình tích quen thuộc và từ đó xử lý tiếp. Tất nhiên là có nhiều yếu tố khác cần chú ý nhưng với các bài toán thông thường thì ý tưởng tổng quát là:

Giả sử trong phương trình, hệ phương trình cần xét, chúng ta có biểu thức dạng $\sqrt{P(x)}$ với $P(x)$ là một đa thức nào đó. Bằng cách nhẩm nghiệm, ta tìm được $x = a$ là một nghiệm của nó. Khi đó, ta sẽ thêm vào biểu thức trên đại lượng $-\sqrt{P(a)}$ để có được biến đổi sau

$$\sqrt{P(x)} - \sqrt{P(a)} = \frac{P(x) - P(a)}{\sqrt{P(x)} + \sqrt{P(a)}}.$$

Đa thức $P(x) - P(a)$ ở trên tử rõ ràng có thể phân tích thành $(x - a)G(x)$ nên sau khi làm các công việc thêm bớt tương tự vào những đại lượng còn lại, chúng ta sẽ có được ngay nhân tử cần tìm.

Như thế, tổng quát hơn, nếu ta có phương trình dạng $f(x) = 0$ với $f(x)$ xác định trên miền $\mathcal{D}$ và ta đã biết nó có nghiệm là $x = a \in \mathcal{D}$ thì ta có thể biến đổi đưa nó về dạng $(x - a)g(x) = 0$ và quy về xử lý phương trình mới $g(x) = 0$.

Trong nhiều trường hợp thì $g(x)$ sẽ vô nghiệm trên $\mathcal{D}$, tuy nhiên một số trường hợp khác thì nó sẽ vẫn còn nghiệm nữa và điều đó đòi hỏi nhiều cách xử lý thích hợp.

1.2 Các ví dụ minh họa

Ví dụ 1. Giải phương trình sau:

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{x+4} + \sqrt{x+9} + \sqrt{x+16} = \sqrt{x+100}.$$

Lời giải. Điều kiện: $x \geq -1$. Ta thấy $x = 0$ là một nghiệm của phương trình nên có thể tiến hành biến đổi như sau

$$\begin{aligned} & (\sqrt{x+1} - 1) + (\sqrt{x+4} - 2) + (\sqrt{x+9} - 3) + (\sqrt{x+16} - 4) = (\sqrt{x+100} - 10) \\ \Leftrightarrow & \frac{(x+1) - 1^2}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{(x+4) - 2^2}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{(x+9) - 3^2}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{(x+16) - 4^2}{\sqrt{x+16} + 4} = \frac{(x+100) - 10^2}{\sqrt{x+100} + 10} \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{x}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{x}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{x}{\sqrt{x+16} + 4} = \frac{x}{\sqrt{x+100} + 10} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} = \frac{1}{\sqrt{x+100} + 10} \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình:

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} = \frac{1}{\sqrt{x+100} + 10}. \quad (1)$$

Ta có $\sqrt{x+100} + 10 > \sqrt{x+1} + 1 > 0$ nên

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} > \frac{1}{\sqrt{x+100} + 10},$$

suy ra

$$\frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} + \frac{1}{\sqrt{x+9} + 3} + \frac{1}{\sqrt{x+16} + 4} > \frac{1}{\sqrt{x+100} + 10}, \quad \forall x \geq -1$$

và do đó phương trình (1) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$. $\square$

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

$$(a) \sqrt[3]{x} + \sqrt{x+3} = 3;$$

$$(b) \sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1.$$

Lời giải. (a) Điều kiện xác định: $x \geq -3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{x} - 1) + (\sqrt{x+3} - 2) &= 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{x-1}{\sqrt{x+3} + 2} = 0 \\ \Leftrightarrow (x-1) \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} \right) &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây, ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình. Xét $x \neq 1$, khi đó theo các biến đổi ở trên, ta có

$$\frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1} + \frac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = 0.$$

Tuy nhiên, điều này không thể xảy ra do $\sqrt{x+3} + 2 > 0$ và

$$\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1 = \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất $x = 1$.

(b) Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt[3]{2x+1} - 1) + \sqrt[3]{x} &= 0 \Leftrightarrow \frac{(2x+1)-1}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{2x+1} + 1} + \sqrt[3]{x} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{2x+1} + 1} + \sqrt[3]{x} &= 0 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \left(\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{2x+1} + 1} + 1 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{2x+1} + 1} + 1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Để thấy

$$\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{(2x+1)^2} + \sqrt[3]{2x+1} + 1} + 1 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

nên từ trên, ta suy ra $x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. □

Ví dụ 3. Tìm tất cả các nghiệm thực của phương trình sau:

$$\sqrt{x^2+15} = 3\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x^2+8} - 2.$$

Lời giải. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2+15} - 4) &= 3(\sqrt[3]{x^2} - 1) + (\sqrt{x^2+8} - 3) \\ \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+15}+4} &= \frac{3(x^2-1)}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2} + 1} + \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+8}+3}. \end{aligned}$$

Như vậy, ta có $x^2 = 1$ hoặc

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} = \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^2}+1} + \frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3}.$$

Tuy nhiên, do $\sqrt{x^2+8}+3 < \sqrt{x^2+15}+4$ nên ta có

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+15}+4} < \frac{1}{\sqrt{x^2+8}+3},$$

và do đó khả năng thứ hai không thể xảy ra. Từ đây ta thu được $x^2 = 1$ hay $x = \pm 1$.

Tóm lại, phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 1$. $\square$

2 Các bài toán áp dụng và những điều cần chú ý

Trong phần này, chúng ta sẽ cùng tìm hiểu thêm các bài toán minh họa khác thể hiện rõ hơn ứng dụng của phương pháp.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

$$(a) \sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}; \quad (\text{Đề đề nghị Olympic 30/4})$$

$$(b) x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x. \quad (\text{Đề thi Olympic 30/4, 2009})$$

Lời giải. (a) Điều kiện: $x \geq \sqrt[3]{2}$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt[3]{x^2-1}-2) + (x-3) = (\sqrt{x^3-2}-5) \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} \right] &= \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{\sqrt{x^3-2}+5} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} = \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình:

$$1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 2\sqrt[3]{x^2-1} + 4} = \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5}. \quad (1)$$

Ta có các đánh giá sau:

$$\begin{aligned} \bullet VP &= \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3-2}+5} > \frac{x^2+3x+9}{\sqrt{x^3}+5} \geq \frac{x^2+3x+9}{\frac{x^2+x}{2}+5} = 2 + \frac{2(2x-1)}{x^2+x+10} > 2. \\ \bullet VT &< 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x^2-1)^2} + 4} = 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^2} + 4} < 1 + \frac{x+3}{\sqrt[3]{(x-1)^3} + 4} = 2. \end{aligned}$$

Do đó, với mọi $x \geq \sqrt[3]{2}$, ta có $VT < 2 < VP$, hay nói cách khác, (1) vô nghiệm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 3$.

(b) Ở bài này, chúng ta có hai cách giải như sau:

Cách 1. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 + 3x - 1 - 3\sqrt[3]{3x+5} &= 0 \Leftrightarrow (x^3 + 3x^2 + 3x - 7) + 3(2 - \sqrt[3]{3x+5}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 4x + 7) + \frac{9(1-x)}{4 + 2\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1) \left[x^2 + 4x + 7 - \frac{9}{4 + 2\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Ta thấy $x = 1$ là một nghiệm của phương trình. Xét $x \neq 1$, khi đó ta có

$$x^2 + 4x + 7 = \frac{9}{4 + 2\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2}},$$

hay

$$(x^2 + 4x + 7) \left[4 + 2\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2} \right] = 9. \quad (1)$$

Ta sẽ chứng minh

$$(x^2 + 4x + 7) \left[4 + 2\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2} \right] \geq 9.$$

Thật vậy, ta có

$$(x^2 + 4x + 7) \left[4 + 2\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2} \right] = [(x+2)^2 + 3] \left[\left(\sqrt[3]{3x+5} + 1 \right)^2 + 3 \right] \geq 9$$

và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x+2=0 \\ \sqrt[3]{3x+5}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2.$$

Từ đây ta suy ra (1) có nghiệm duy nhất $x = -2$. Vậy phương trình đã cho có tất cả hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

Cách 2. Ta sẽ biến đổi phương trình đã cho theo cách khác như sau:

$$\begin{aligned} x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} &= 1 - 3x \Leftrightarrow (x^3 + 3x^2 - 4) + 3(x+1 - \sqrt[3]{3x+5}) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 + \frac{3[(x+1)^3 - 3x - 5]}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 + \frac{3(x^3 + 3x^2 - 4)}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)(x+2)^2 \left[1 + \frac{3}{(x+1)^2 + (x+1)\sqrt[3]{3x+5} + \sqrt[3]{(3x+5)^2}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên ta suy ra phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$. $\square$

Nhận xét. Ở cách thứ nhất của câu (b), do chỉ tìm được một nghiệm của phương trình là $x = 1$ nên lời giải dẫn đến một phương trình khác mà ta phải dùng bất đẳng thức đánh giá để tìm nghiệm còn lại. Trong khi đó, ở cách 2, vì đã tìm được cả hai nghiệm của phương trình đã cho nên có thể chủ động nhóm các hạng tử để tạo nên nhân tử chung là $(x - 1)(x + 2)$, còn lại biểu thức trong ngoặc đã luôn dương với mọi x nên việc giải phương trình coi như hoàn tất. Các bước phân tích để có được cách nhóm trên sẽ được giới thiệu rõ ở các bài sau. Dưới đây là cách thông dụng khi giải bài toán này, đó chính là đưa về hệ phương trình đối xứng, một cách giải quan trọng dùng để xử lý các bài phương trình có bậc hai về là nghịch đảo của nhau.

Cách 3. Phương trình đã cho có thể được viết dưới dạng

$$(x + 1)^3 - 2 = 3\sqrt[3]{3x + 5}.$$

Đặt $\sqrt[3]{3x + 5} = y + 1$ thì ta có $(y + 1)^3 = 3x + 5$. Từ đây và từ phương trình ở trên, ta có hệ

$$\begin{cases} (x + 1)^3 = 3y + 5 \\ (y + 1)^3 = 3x + 5 \end{cases}$$

Trừ vế theo vế các phương trình, ta được

$$(x - y) [(x + 1)^2 + (x + 1)(y + 1) + (y + 1)^2 + 3] = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(Do biểu thức trong ngoặc vuông luôn dương với mọi $x, y \in \mathbb{R}$). Thay $y = x$ ngược trở lại vào hệ, ta được phương trình tương ứng là

$$(x + 1)^3 = 3x + 5.$$

Giải ra và thử lại, ta cũng được các nghiệm $x = 1$ và $x = -2$.

Ví dụ 5. Giải các phương trình sau:

$$(a) (x + 3)\sqrt{2x^2 + 1} = x^2 + x + 3; \quad (b) (x + 3)\sqrt{x^2 + 5} = 2x^2 + 3x + 1.$$

Lời giải. (a) Dễ thấy $x = -3$ không là nghiệm của phương trình nên ta chỉ cần xét $x \neq -3$ là đủ. Khi đó, phương trình đã cho có thể được viết lại dưới dạng

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + 1} &= \frac{x^2 + x + 3}{x + 3} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} - 1 = \frac{x^2}{x + 3} \\ \Leftrightarrow \frac{2x^2}{\sqrt{2x^2 + 1} + 1} &= \frac{x^2}{x + 3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{x + 3} \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra $x = 0$ là một nghiệm của phương trình đã cho. Xét phương trình còn lại, ta thấy phương trình này tương đương với

$$\begin{aligned} \sqrt{2x^2 + 1} + 1 &= 2x + 6 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 1} = 2x + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ 2x^2 + 1 = 4x^2 + 25 + 20x \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x^2 + 10x + 12 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{2} \\ x = -5 + \sqrt{13} \vee x = -5 - \sqrt{13} \end{cases} \Leftrightarrow x = -5 + \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = -5 + \sqrt{13}$.

(b) Tương tự bài trên, ta thấy $x = -3$ không là nghiệm của phương trình. Xét $x \neq -3$, ta có phương trình tương đương

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+5} &= \frac{2x^2+3x+1}{x+3} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} - 3 = \frac{2x^2+3x+1}{x+3} - 3 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2-4}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2(x^2-4)}{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \\ \frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} = \frac{2}{x+3} \end{cases}\end{aligned}$$

Nếu $x^2 - 4 = 0$ thì ta có $x = \pm 2$ và hai giá trị này thỏa mãn phương trình đã cho. Còn với $x^2 - 4 \neq 0$ thì từ biến đổi trên, ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3} &= \frac{2}{x+3} \Leftrightarrow x+3 = 2\sqrt{x^2+5}+6 \Leftrightarrow x-3 = 2\sqrt{x^2+5} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x^2+9-6x = 4(x^2+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 3x^2+6x+11=0 \end{cases}\end{aligned}$$

Rõ ràng không có giá trị nào của x thỏa mãn hệ này. Và như thế, ta đi đến kết luận phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -2$ và $x = 2$. $\square$

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

(a) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 4-2x$;

(b) $\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = -2x$;

(c) $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} = 2x$.

Lời giải. (a) Điều kiện: $x \geq 1$. Với điều kiện này, ta dễ thấy:

- $VT \geq \sqrt{x+3} \geq 2$ và đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.
- $VP \leq 2$ và đẳng thức cũng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$.

Do vậy, để có thể xảy ra trường hợp $VT = VP$ như đã nêu ở đề bài thì ta phải có $VT = VP = 2$, tức $x = 1$. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.

(b) Điều kiện: $x \geq 1$. Ta nhận được $x = 1$ là nghiệm của phương trình và điều này gợi cho ta nghĩ đến việc biến đổi phương trình như sau

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} - \sqrt{x+3} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} &= -2x \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} &= \sqrt{x+3} - 2x \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} &= -\frac{(x-1)(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}.\end{aligned}$$

Ta thấy rằng với $x \geq 1$ thì vế trái của phương trình trên là một đại lượng không âm, trong khi đó vế phải luôn mang giá trị ≤ 0 . Do đó, để có thể xảy ra được dấu đẳng thức như trên thì cả hai đại lượng này phải đồng thời bằng 0, tức là $x = 1$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

(c) Điều kiện: $x \geq 1$. Biến đổi tương tự như trên, ta được

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + 2\sqrt{(x-1)(x^2-3x+5)} &= \frac{(x-1)(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x} \\ \Leftrightarrow \sqrt{x-1} \left[1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} - \frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x} \right] &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = 0 \\ 1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} = \frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x} \end{cases} \end{aligned}$$

Đến đây, bằng cách giải phương trình thứ nhất, ta tìm được một nghiệm là $x = 1$. Xét tiếp phương trình thứ hai, ta thấy

$$1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} = 1 + \sqrt{2[x^2 + (x-3)^2 + 1]} > 1 + \sqrt{2x^2} > 1 + x.$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM thì $x = (x-1) + 1 \geq 2\sqrt{x-1}$. Do vậy, ta có

$$\frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x} \leq \frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{2x} \leq \frac{\frac{x}{2} \cdot (4x+3)}{2x} = \frac{4x+3}{4} < x+1 < 1 + 2\sqrt{x^2-3x+5}.$$

Điều này chứng tỏ phương trình $1 + 2\sqrt{x^2-3x+5} = \frac{\sqrt{x-1}(4x+3)}{\sqrt{x+3}+2x}$ vô nghiệm. Và như thế, ta đi đến kết luận $x = 1$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. $\square$

Ví dụ 7. Giải các phương trình sau:

$$(a) \quad 3(2 + \sqrt{x-2}) = 2x + \sqrt{x+6}; \quad (\text{Đề thi Học viện Kỹ thuật Quân sự, 2000})$$

$$(b) \quad \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0. \quad (\text{Đề thi Đại học khối B, 2010})$$

Lời giải. (a) Điều kiện: $x \geq 2$. Ta có phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} 2(x-3) + (\sqrt{x+6} - 3\sqrt{x-2}) &= 0 \Leftrightarrow 2(x-3) + \frac{(x+6) - 9(x-2)}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} = 0 \\ \Leftrightarrow (x-3) \left[1 - \frac{4}{\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2}} \right] &= 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ \sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Xét phương trình $\sqrt{x+6} + 3\sqrt{x-2} = 4$. Bình phương hai vế để khử căn, ta được

$$10x - 12 + 6\sqrt{(x+6)(x-2)} = 16 \Leftrightarrow 3\sqrt{(x+6)(x-2)} = 14 - 5x$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{14}{5} \\ 9(x+6)(x-2) = (14-5x)^2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{14}{5} \\ x^2 - 11x + 19 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq \frac{14}{5} \\ x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{11+3\sqrt{5}}{2} \end{cases} &\Leftrightarrow x = \frac{11-3\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $T = \left\{ \frac{11-3\sqrt{5}}{2}, 3 \right\}$.

(b) Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3x+1} - 4) - (\sqrt{6-x} - 1) + 3x^2 - 14x - 5 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1)(x-5) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 5 \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Dễ thấy

$$\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + 3x+1 > 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{3}, 6\right]$$

nên trường hợp thứ hai không thể xảy ra. Từ đây ta suy ra phương trình đã cho chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = 5$. $\square$

Ví dụ 8. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

(a) $\sqrt[3]{2x+2} + \sqrt[3]{2x+1} = \sqrt[3]{2x^2} + \sqrt[3]{2x^2+1}$;

(b) $\sqrt{3-x} + \sqrt{2+x} = x^3 + x^2 - 4x - 4 + |x| + |x-1|$;

(c) $2\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + x^2 - 4 \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+1}}$.

Lời giải. (a) Ta thấy rằng ở hai vế đều có dạng hàm số $f(t) = \sqrt[3]{t} + \sqrt[3]{t+1}$ nên có thể dùng tính đơn điệu của hàm số để giải dễ dàng. Ở đây, ta dùng phương pháp nhân liên hợp nhằm làm xuất hiện nhân tử chung ở hai vế. Trước hết, ta viết lại phương trình dưới dạng

$$\left(\sqrt[3]{2x^2+1} - \sqrt[3]{2x+2}\right) + \left(\sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{2x+1}\right) = 0.$$

Bằng cách nhân các lượng liên hợp tương ứng, ta có

$$\sqrt[3]{2x^2+1} - \sqrt[3]{2x+2} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt[3]{(2x^2+1)^2} + \sqrt[3]{(2x^2+1)(2x+2)} + \sqrt[3]{(2x+2)^2}} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{A}$$

và

$$\sqrt[3]{2x^2} - \sqrt[3]{2x+1} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{\sqrt[3]{(2x^2)^2} + \sqrt[3]{2x^2(2x+1)} + \sqrt[3]{(2x+1)^2}} = \frac{2x^2 - 2x - 1}{B}.$$

Do đó, phương trình đã cho tương đương với

$$(2x^2 - 2x - 1) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) = 0.$$

Tuy nhiên, do $A, B > 0$ nên từ đây ta có

$$2x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \vee x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ và $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$.

(b) Điều kiện: $-2 \leq x \leq 3$. Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & (\sqrt{3-x} - |x-1|) + (\sqrt{2+x} - |x|) = x^3 + x^2 - 4x - 4 \\ \Leftrightarrow & \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{3-x} + |x-1|} + \frac{-x^2 + x + 2}{\sqrt{2+x} + |x|} = (x+2)(x+1)(x-2) \\ \Leftrightarrow & \frac{(2-x)(x+1)}{\sqrt{3-x} + |x-1|} + \frac{(2-x)(x+1)}{\sqrt{2+x} + |x|} + (x+2)(x+1)(2-x) = 0 \\ \Leftrightarrow & (2-x)(x+1) \left[\frac{1}{\sqrt{3-x} + |x-1|} + \frac{1}{\sqrt{2+x} + |x|} + (x+2) \right] = 0. \end{aligned}$$

Do $\frac{1}{\sqrt{3-x}+|x-1|} + \frac{1}{\sqrt{2+x}+|x|} + (x+2) > 0, \forall x \in [-2, 3]$ nên từ trên, ta có

$$(2-x)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 2.$$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = -1$ và $x = 2$.

(c) Điều kiện: $x > -4$. Bất phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & 2 \left(\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} - 1 \right) + x^2 - 3 \leq \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \\ \Leftrightarrow & 2 \cdot \frac{\frac{x^2+x+1}{x+4} - 1}{\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x+4}} + 1} + x^2 - 3 \leq \frac{\frac{4}{x^2+1} - 1}{\frac{2}{\sqrt{x^2+1}} + 1} \\ \Leftrightarrow & \frac{2(x^2-3)}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)} + x+4} + (x^2-3) + \frac{x^2-3}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \leq 0. \end{aligned}$$

Và như thế, ta thu được

$$(x^2-3) \left[\frac{2}{\sqrt{(x+4)(x^2+x+1)} + x+4} + 1 + \frac{1}{(2+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}} \right] \leq 0.$$

Dễ thấy biểu thức trong dấu ngoặc thứ hai luôn dương với mọi $x > -4$, do đó ta có thể viết lại bất phương trình trên thành

$$x^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}.$$

Kết hợp với điều kiện xác định $x > -4$, ta thu được $T = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ là tập nghiệm của bất phương trình đã cho. $\square$

Nhận xét. Với câu (b) của ví dụ này, ta thấy có xuất hiện thêm các đa thức chứa dấu trị tuyệt đối là $|x-1|, |x|$. Tưởng chừng điều này sẽ gây khó khăn hơn trong việc giải quyết, vì phương trình chứa dấu trị tuyệt đối thì thường khó phân tích thành nhân tử. Nhưng nhờ việc sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp, bài toán này đã được giải nhanh chóng và khá nhẹ nhàng. Khi ấy, ta chỉ cần chuyển các lượng ấy về đúng vị trí và sử dụng phương pháp nhân lượng liên hợp là đủ.

Cách tiếp cận bằng nhân lượng liên hợp cho phép ta dám biến đổi các biểu thức một cách tự do hơn, thoải mái hơn, không bị gò bó nhiều quá ở việc lựa chọn biểu thức thật thích hợp hay đánh giá như trong các cách khác.