

Bộ ba Steiner

Trương Phước Nhân, 02/02/2018

Một bộ ba Steiner là một BIBD với $k=3$ và $\lambda=1$, ta sẽ kí hiệu một bộ ba Steiner là $STS(v)$. Sử dụng điều kiện tồn tại số học của một BIBD ta nhận được điều kiện cần về sự tồn tại của một $STS(v)$ là $v \equiv 1 \pmod{2}$ và $v(v-1) \equiv 0 \pmod{6}$ hay nói cách khác là $v \equiv 1$ hoặc $3 \pmod{6}$.

Một điểm đáng chú ý ở đây là điều kiện cần mà ta vừa tìm được ở trên cũng chính là điều kiện đủ cho sự tồn tại của STS được trình bày dưới đây lần lượt cho các trường hợp $v=6n+1$ và $v=6n+3$. (xem lại bài viết "BIBD")

a) Phép xây dựng của Bose :

Kết quả 1: Cho (Q, o) là một giả nhóm giao hoán lũy linh bất kì bậc $2n+1$ trong đó $Q = \{1, 2, \dots, 2n+1\}$.

Đặt $V = Q \times \mathbb{Z}_3$ và $\mathcal{B}$ là họ tất cả các bộ ba có dạng :

$$(1) \{(x; 0), (x; 1), (x; 2)\}, x \in Q$$

$$(2) \{(x; i), (y; i), (xoy; i+1)\}, x, y \in Q, x \neq y, i \in \mathbb{Z}_3$$

Khi đó $(V, \mathcal{B})$ là một $STS(6n+3)$

Chứng minh: Ta thực hiện việc đếm số các bộ ba thỏa mãn yêu cầu. Có $2n+1$ bộ ba loại 1) ; ta có

$\binom{2n+1}{2}$ cách chọn x và y và 3 cách để chọn chỉ số i cho bộ ba loại 2).

Do đó $|\mathcal{B}| = 2n+1 + 3\binom{2n+1}{2} = (2n+1)(3n+1)$ đây chính số các bộ ba tương ứng trong $STS(6n+3)$. Nhận

thấy rằng ta chỉ ra rằng một cặp phần tử phân biệt được chứa ít nhất một bộ ba. Ta xét một cặp phần tử $(a, j), (b, k)$. Nếu $a=b$ thì $\{(a; 0), (a; 1), (a; 2)\}$ là một bộ ba loại 1) chứa (a, j) và (b, k) . Nếu $a \neq b$ và $j=k$ thì $\{(a; i), (b; i), (aob; i+1)\}$ là một bộ ba loại 2) chứa cặp (a, j) và (b, k) .

Trong trường hợp $a \neq b$ và $j \neq k$. Do (Q, o) là một giả nhóm nên tồn tại phần tử $p \in Q$ sao cho $aop = b$.

Do (Q, o) là lũy linh và $a \neq b$ nên ta suy ra $p \neq a$, ta có bộ $\{(a; j), (p; j), (aop; k) = (b; k)\}$ là một bộ ba chứa (a, j) và (b, k) .

b) Phép xây dựng của Skolem :

Kết quả 2: Cho (Q, o) là một giả nhóm nửa lũy linh giao hoán bất kì có bậc $2n$ trong đó $Q = \{1, 2, \dots, 2n\}$.

Đặt $V = \{\infty\} \cup (Q \times \mathbb{Z}_3)$, và $\mathcal{B}$ là họ tất cả các bộ ba có dạng :

$$(1) \{(x; 0), (x; 1), (x; 2)\}, 1 \leq x \leq n$$

$$(2) \{\infty, (n+x; i), (x; i+1)\}, 1 \leq x \leq n, i \in \mathbb{Z}_3$$

$$(3) \{(x; i), (y; i), (xoy; i+1)\}, x, y \in Q, x \neq y, i \in \mathbb{Z}_3$$

Khi đó $(V, \mathcal{B})$ là một $STS(6n+1)$

Sử dụng phương pháp lập luận tương tự như trong kết quả 1) ta cũng có thể kiểm tra lại dễ dàng kết quả vừa trình bày ở trên.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Alexander Rosa, Combinatorial Design Theory, ???

[2]. Trương Phước Nhân, BIBD, 02/02/2018