Tích tensor – Nghịch đảo Mobius

Trương Phước Nhân, 10/09/2017

Cho V là một không gian vector trên trường K ta định nghĩa không gian *đối ngẫu* V^* là tập tất cả các ánh xạ tuyến tính từ V vào K.

Kết quả 1: Nếu V là không gian hữu hạn chiều ta dễ dàng chỉ ra được rằng V^* cũng hữu hạn chiều và có cùng số chiều với không gian V

Chứng minh :

Giả sử $v_1, v_2, ..., v_n$ là một cơ sở của không gian vector V. Ta xây dựng một hệ cơ sở $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ của không gian V^* như sau : Do $v_1, v_2, ..., v_n$ là một cơ sở của không gian V nên mọi phần tử $x \in V$ đều có dạng $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, với mỗi chỉ số i ta định nghĩa ánh xạ $v_i^* : V \to K$ bởi $v_i^*(x) = \alpha_i$.

Ta kiểm tra lại tính chất cơ sở của hệ $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ như sau :

i) $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ độc lập tuyến tính

Thật vậy, giả sử $\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + ... + \alpha_n v_n^* = 0$.

Suy ra $(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^* + ... + \alpha_n v_n^*)(v_i) = 0(v_i)$ với mọi $i = \overline{1, n}$

$\Rightarrow \alpha_1 v_1^*(v_i) + ... + \alpha_i v_i^*(v_i) + ... + \alpha_n v_n^*(v_i) = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha_i = 0 \quad$ (bởi vì $v_i^*(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } i = j \\ 0 \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$)

Do đó $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$

ii) $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ là một hệ sinh của V^*

Thật vậy, theo cách ta định nghĩa các phần tử $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ ta suy ra $v = \sum_{i=1}^{n} v_i^*(v) v_i$ với mọi $v \in V$

Do đó với mọi phần tử $\bar{v} \in V^*$ ta có $\bar{v}(v) = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}(v_i) v_i^*(v)$ hay $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{v}(v_i) v_i^*$

Kết hợp các phân tích trên ta thu được $v_1^*, v_2^*, ..., v_n^*$ là một cơ sở của V^*.

Giả sử V, W là các không gian vector và T là một ánh xạ tuyến tính từ V vào W, ta xác định một ánh xạ tuyến tính $T^* : W^* \to V^*$ xác định bởi $T^*(f)(v) = f(T(v))$ với $f \in W^*$.

Kết quả 2: Nếu S là một ánh xạ tuyến tính từ không gian vector U vào V thì bằng tính toán trực tiếp ta có $(ST)^* = T^* S^*$.

Chứng minh :
$$\begin{aligned} (ST)^*(f)(v) &= f((ST)(v)) \\ &= f(S(Tv)) \\ &= (S^* f)(Tv) \\ &= (T^* S^*)(f)(v) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad (ST)^*(f) = (T^* S^*)(f)$$

$$\Rightarrow \quad (ST)^* = T^* S^*$$

Cho hai không gian vector V và W ta định nghĩa *tích tensor* $V \otimes W$ là tập tất cả các dạng song tuyến tính trên $V^* \times W^*$.

Cho $S : V \to V$ và $T : W \to W$ là các ánh xạ tuyến tính thì ta định nghĩa ánh xạ tuyến tính $S \otimes T : V \otimes W \to V \otimes W$ như sau : với mọi $B \in V \otimes W$ ta định nghĩa $((S \otimes T)B)(f, g) = B(S^* f, T^* g)$ với mọi $f \in V^*$ và $g \in W^*$.

Kết quả 3: Nếu $S,S':V\to V$ và $T,T':W\to W$ là các ánh xạ tuyến tính thì $(S'\otimes T')\circ(S\otimes T)=SS'\otimes TT'$

Chứng minh :

$$\begin{aligned}\big(\big((S'\otimes T')\circ(S\otimes T)\big)B\big)(f,g)&=(S'\otimes T')\big(\big((S\otimes T)B\big)(f,g)\big)\\&=(S'\otimes T')\big(B\big(S^*f,T^*g\big)\big)\\&=\big((S'\otimes T')B\big)\big(S^*f,T^*g\big)\\&=B\big(S'^*S^*(f),T'^*T^*(g)\big)\\&=B\big((SS')^*(f),(TT')^*(g)\big)\quad\text{(sử dụng kết quả 2)}\\&=\big((SS'\otimes TT')B\big)(f,g)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\qquad (S'\otimes T')\circ(S\otimes T)(B)=(SS'\otimes TT')(B)$$

$$\Rightarrow\qquad (S'\otimes T')\circ(S\otimes T)=SS'\otimes TT'$$

Kết quả 4:

Giả sử $v_1,v_2,\dots,v_n$ và $w_1,w_2,\dots,w_m$ lần lượt là các cơ sở của các không gian vector V và W

Đặt $B_{ij}\in V\otimes W$ như sau : $B_{ij}\left(v_h^*,w_k^*\right)=\begin{cases}1:\ \text{nếu } (i,j)=(h,k)\\0:\ \text{trường hợp còn lại}\end{cases}$.

Khi đó : hệ $\{B_{ij}\}_{i=\overline{1,n};\,j=\overline{1,m}}$ lập thành một cơ sở của $V\otimes W$

Chứng minh : Ta tiến hành kiểm lại các tiên đề về cơ sở như sau :

i) $\{B_{ij}\}_{i=\overline{1,n};\,j=\overline{1,m}}$ là một hệ sinh

Giả sử B là một dạng song tuyến tính trên $V^*\times W^*$.

Theo kết quả 1) ta suy ra $v_1^*,v_2^*,\dots,v_n^*$ và $w_1^*,w_2^*,\dots,w_m^*$ lần lượt là các cơ sở của V^* và W^* nên với mọi $f\in V^*$ và $g\in W^*$ đều có dạng $f=\alpha_1v_1^*+\alpha_2v_2^*+\dots+\alpha_nv_n^*$ và $g=\beta_1w_1^*+\beta_2w_2^*+\dots+\beta_mw_m^*$.

Từ định nghĩa của B_{ij} ta suy ra :

$$B_{ij}(f,g)=B_{ij}\left(\sum_{h=1}^{n}\alpha_hv_h^*,\sum_{k=1}^{m}\beta_kw_k^*\right)=\sum_{h=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\alpha_h\beta_kB_{ij}\left(v_h^*,w_k^*\right)=\alpha_i\beta_j\quad(*)$$

Bằng tính toán trực tiếp ta thu được :

$$\begin{aligned}B(f,g)&=B\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_iv_i^*,\sum_{j=1}^{m}\beta_jw_j^*\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_jB\left(v_i^*,w_j^*\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}B_{ij}(f,g)B\left(v_i^*,w_j^*\right)\quad\text{(sử dụng tính toán *)}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}B\left(v_i^*,w_j^*\right)B_{ij}(f,g)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow B(f,g)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}B\left(v_i^*,w_j^*\right)B_{ij}(f,g)$$

$$\Rightarrow\qquad B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}B\left(v_i^*,w_j^*\right)B_{ij}$$

i) $\{B_{ij}\}_{i=\overline{1,n};\,j=\overline{1,m}}$ là một hệ độc lập

Thật vậy, giả sử $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}B_{ij}=0$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ij}B_{ij}\left(v_h^*, w_k^*\right) = 0\left(v_h^*, w_k^*\right) \text{ với mọi } (h,k)\in\{1,2,...,\ n\}\times\{1,2,...,\ m\}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{hk} = 0$$

Do đó $\lambda_{ij} = 0$ với mọi $(i,j)\in\{1,2,...,\ n\}\times\{1,2,...,\ m\}$.

Nhận xét :

Giả sử $S^*\left(v_h^*\right) = \sum_{h'=1}^{n} S_{hh'}v_{h'}^*$ và $T^*\left(w_k^*\right) = \sum_{k'=1}^{m} T_{kk'}v_{k'}^*$ với mọi $(h,k)\in\{1,2,...,\ n\}\times\{1,2,...,\ m\}$

Khi đó :

$$\begin{aligned}\left((S\otimes T)B_{ij}\right)\left(v_h^*, w_k^*\right) &= B_{ij}\left(S^*\left(v_h^*\right), T^*\left(w_k^*\right)\right)\\ &= B_{ij}\left(\sum_{h'=1}^{n} S_{hh'}v_{h'}^*, \sum_{k'=1}^{m} T_{kk'}v_{k'}^*\right)\\ &= \sum_{h'=1}^{n}\sum_{k'=1}^{m} S_{hh'}T_{kk'}B_{ij}\left(v_{h'}^*, v_{k'}^*\right)\\ &= S_{hi}T_{kj}\end{aligned}$$

Theo kết quả 4) thì $\{B_{ij}\}_{i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,m}}$ là một cơ sở của $V\otimes W$ nên tính toán trên có nghĩa là biểu diễn ma trận của $S\otimes T$ là tích Kronecker của các ma trận biểu diễn của S và T theo các cơ sở tương ứng.

Cho trước hai poset $(P,\leq_P);(Q,\leq_Q)$ ta xác định quan hệ thứ tự $\leq_{P\times Q}$ trên tích Descartes $P\times Q$ như sau :

$$(x,x')\leq_{P\times Q}(y,y') \text{ khi } x\leq_P x' \text{ và } y\leq_Q y'$$

Kết quả 5:
$\mu_{P\times Q}\left((x,y),(x',y')\right) = \mu_P\left((x,x')\right)\mu_Q\left((y,y')\right)$ với $x,x'\in P$ và $y,y'\in Q$ trong đó $x\leq_P x'$ và $y\leq_Q y'$

Chứng minh : Từ cách xây dựng ta suy ra :

$$\zeta_{P\times Q}\left((x,y),(x',y')\right) = \zeta_P\left((x,x')\right)\zeta_Q\left((y,y')\right)$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\zeta_{P\times Q}\right) = M\left(\zeta_P\right)\otimes M\left(\zeta_Q\right) \qquad \text{(sử dụng nhận xét của kết quả 4)}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\zeta_{P\times Q}\right)^{-1} = M\left(\zeta_P\right)^{-1}\otimes M\left(\zeta_Q\right)^{-1} \qquad \text{(suy ra từ kết quả 3)}$$

$$\Rightarrow \quad M\left(\mu_{P\times Q}\right) = M\left(\mu_P\right)\otimes M\left(\mu_Q\right)$$

$$\Rightarrow \mu_{P\times Q}\left((x,y),(x',y')\right) = \mu_P\left((x,x')\right)\mu_Q\left((y,y')\right)$$

(xem thêm **“ Nghịch đảo Mobius trên poset ”**)

Tài liệu tham khảo :

[1]. Bài giảng Algebraic Combinatorics của Lionel Levine , 15/02/2011
[2]. Trương Phước Nhân, Nghịch đảo Mobius trên poset, 10/09/2017
[3]. Lê Tuấn Hoa, Đại số tuyến tính, 12/09/2017