Số Stirling

Trương Phước Nhân, 28/09/2017

Các tập hợp khác rỗng $A_1, A_2, ..., A_k$ được gọi là một phân hoạch của tập hợp A nếu :

$$\begin{cases} A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k \\ A_i \cap A_j = \varnothing \ \forall i, j \in \{1, 2, ..., k\}, i \neq j \end{cases}$$

Mỗi tập con A_i $(i = 1, 2, ..., k)$ được gọi là một thành phần của phân hoạch.

Số $S(n,k)$ là số tất cả các phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng với n, k là các số nguyên dương và $k \leq n$.

Kết quả 1 : Số cách phân phối n đồ vật khác nhau cho k người sao cho mỗi người nhận được ít nhất một đồ vật là $k!S(n,k)$, trong đó k, n là các số nguyên dương và $k \leq n$.

Chứng minh : Ta nhận thấy rằng một cách phân phối thỏa mãn là một công việc gồm 2 giai đoạn :

Giai đoạn 1: Chia n đồ vật thành k phần khác nhau sao cho mỗi phần có ít nhất một đồ vật.

Số các thực hiện ở giai đoạn 1 chính là số cách phân hoạch của tập A gồm n phần tử thành k tập khác rỗng, theo định nghĩa ở trên thì số các cách ở bước này là $S(n,k)$

Giai đoạn 2: Phân phối mỗi thành đồ vật cho mỗi người.

Vì mỗi thành phần đem phân phối cho người khác nhau thì coi là khác nhau nên ứng với mỗi cách chia ở giai đoạn 1 ta đem hoán vị các phần cho nhau thì được $k!$ cách

Theo nguyên lí nhân ta suy ra số cách phân phối là $k!S(n,k)$, đpcm

Kết quả 2: $S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$

Chứng minh : Giả sử A là tập hợp với $|A| = n$, $A = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n\}$. Gọi P là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k tập khác rỗng thì ta có $|P| = S(n,k)$

P_1 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k tập khác rỗng sao cho $\{a_n\}$ là một thành phần của phân hoạch đó

P_2 là tập tất cả các phân hoạch của tập A thành k tập khác rỗng sao cho $\{a_n\}$ không là một thành phần của phân hoạch đó. Khi đó : $\begin{cases} P = P_1 \cup P_2 \\ P_1 \cap P_2 = \varnothing \end{cases}$

Tính $|P_1|$:

Vì $\{a_n\}$ là một thành phần của mỗi phân hoạch trong P_1, nên mỗi phân hoạch trong P_1 tương ứng với đúng một phân hoạch của tập $A \backslash \{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_{n-1}\}$ thành $k-1$ thành phần khác rỗng, do đó $|P_1| = S(n-1, k-1)$

Tính $|P_2|$:

Xét phân hoạch của P_2, chẳng hạn $\alpha = \{A_1, A_2, ..., A_k\}$ với $a_n \in A_1$. Khi đó $A_1 \backslash \{a_n\} \neq \varnothing$, do $\{a_n\}$ không là một thành phần trong phân hoạch của P_2. Vì vậy $\alpha_1 = \{A_1 \backslash \{a_n\}, A_2, ..., A_k\}$ tạo thành một phân hoạch gồm k thành phần khác rỗng của tập $A \backslash \{a_n\}$. Xét tương tự khi $a_n \in A_i$ $(i = 2, 3, ..., k)$.

Ngược lại, nếu $\beta = \{B_1, B_2, ..., B_k\}$ là một phân hoạch của tập $A_1 \backslash \{a_n\}$ thành k thành phần khác rỗng thì $\begin{cases} \beta_1 = \{B_1 \cup \{a_n\}, B_2, ..., B_k\} \\ \beta_1 = \{B_1, B_2 \cup \{a_n\}, ..., B_k\} \\ .... \\ \beta_k = \{B_1, B_2, ..., B_k \cup \{a_n\}\} \end{cases}$ là các phân hoạch của tập A thành k thành phần , do vậy $|P_2| = kS(n-1,k)$

Theo nguyên lý cộng ta suy ra : $|P| = |P_1| + |P_2| \Rightarrow S(n,k) = kS(n-1,k) + S(n-1,k-1)$, đpcm.

Kết quả 3: $S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n$

Chứng minh : Ta chứng minh kết quả trên bằng phương pháp qui nạp theo n.

Với $n=1$ thì $k=1$ và ta có $S(1,1)=(-1)^0.1=1$

Giả sử kết quả trên được chứng minh đúng cho n và mọi số nguyên dương $k\le n$. Ta cần chứng minh kết quả này cũng đúng cho $n+1$ và mọi số nguyên dương $k\le n+1$.

Thật vậy, ta chỉ cần chứng minh kết quả đúng với $k\le n$:

Sử dụng kết quả 1) ta suy ra $S(n+1,k)=kS(n,k)+S(n,k-1)$

$$=k\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}j^n+\frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\binom{j}{k-1}j^n$$

$$=\frac{1}{k!}\left[k\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}j^n+k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-1-j}\binom{j}{k-1}j^n\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\left[k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\left(\binom{j}{k}-\binom{j}{k-1}\right)j^n+(-1)^{k-k}\binom{k}{k}k^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\left[k\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{j-1}{k-1}j^n+(-1)^{k-k}\binom{k}{k}k^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\frac{k}{j}\binom{j-1}{k-1}j^{n+1}+(-1)^{k-k}\binom{k}{k}k^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\left[\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}j^n+(-1)^{k-k}\binom{k}{k}k^{n+1}\right]$$

$$=\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{j}{k}j^n$$

Với $k=n+1$ ta có : $1=S(n+1,n+1)=\frac{1}{(n+1)!}\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1-j}\binom{n+1}{j}j^{n+1}$

Tài liệu tham khảo :

[1]. Hoàng Chí Thành, Giáo trình Tổ hợp

[2]. Tạp chí toán học tuổi trẻ