Định lý Erdos- Ko – Rado

Trương Phước Nhân, 03/02/2018

Cho $\mathcal{F}$ là một họ giao các $k-$tập con của $\{1,2,...,n\}$. Câu hỏi đơn giản được đặt ra như sau : Hỏi một họ $\mathcal{F}$ thỏa mãn các yêu cầu như trên có kích thước tối đa là bao nhiêu ?

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $n \geq 2k$, bởi vì nếu trường hợp ngược lại xảy ra thì với hai tập con $k-$ phần tử bất kì luôn có giao với nhau và câu trả lời là $\binom{n}{k}$ (xem bài viết "**Các bài toán về giao của một họ tập – phần 1**")

Ta có thể thu được một họ giao bằng cách $\binom{n-1}{k-1}$ các $k-$tập con cùng chứa một phần tử cố định. Câu hỏi đặt ra là liệu với cách làm này là tối ưu nhất hay chưa ? Kết quả sau đây trả lời cho điều nghi vấn vừa nêu được đề ra bởi Erdos, Ko và Rado

Kết quả : (Erdos – Ko – Rado)

Nếu $n \geq 2k$ thì mọi họ giao các $k-$tập con của một $n-$tập chứa tối đa $\binom{n-1}{k-1}$ thành viên

Chứng minh : (Katona) Gỉa sử $\mathcal{F}$ là một họ giao các $k-$ tập con của một $n-$ tập.

Không mất tính tổng quát của bài toán ta sẽ xét các $n-$ tập là $[n]=\{0,1,....,n-1\}$.

Với mỗi $s \in [n]$, ta đặt B_s là tập k số liên tiếp $s, s+1,....,s+k-1$, trong đó phép cộng được xét đến ở đây theo $\bmod n$.

Khẳng định: Có tối đa k tập B_s có thể nằm trong họ $\mathcal{F}$

Chứng minh khẳng định: Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $B_0 \in \mathcal{F}$. Một tập B_s có giao với B_0, ở đây ta không tính trường hợp B_0 tự giao với chính nó, chỉ khi nào $-(k-1) \leq s \leq k-1, s \neq 0$ (lưu ý ta đang lấy chỉ số theo modulo n) như vậy là bao gồm có $2k-2$ tập B_s như vậy tất cả. Ta tiến hành phân chia các tập thành các cặp $\{B_i, B_{i+k}\}$ trong đó $-(k-1) \leq i \leq -1$. Nhận xét rằng các cặp $\{B_i, B_{i+k}\}$ này có giao bằng rỗng nên trong hai tập này chỉ có tối đa một tập nằm trong họ giao $\mathcal{F}$. Như vậy họ $\mathcal{F}$ chứa tối đa là $(k-1)+1=k$ thành viên ($k-1$ tập B_s cộng với bản thân tập B_0).

Tiếp theo ta tiến hành đếm bằng hai cách số L các bộ (f,s), trong đó f là một hoán vị của tập $[n]$ và s là một phần tử thuộc tập $[n]$ sao cho tập $f(B_s) := \{f(s), f(s+1),..., f(s+k-1)\}$ là một thành viên của họ $\mathcal{F}$.

Đầu tiên, có chính xác $nk!(n-k)!$ cặp (f,s) cho tương ứng cùng một tập $f(B_s)$: có n cách để chọn s, và với mỗi s cố định, có chính xác $k!(n-k)!$ cách để chọn hoán vị f. Do đó $L=|\mathcal{F}|nk!(n-k)!$

Mặt khác, theo khẳng định thì với mỗi hoán vị cố định f, họ $\mathcal{F}$ chứa tối đa k tập $f(B_s)$. Do đó : $L \leq kn!$

Tóm lại: $|\mathcal{F}|nk!(n-k)! \leq kn! \Rightarrow |\mathcal{F}| \leq \dfrac{kn!}{nk!(n-k)!} = \dbinom{n-1}{k-1}$.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Stasys Jukna , Extremal Combinatorics: with Applications in Computer Science,Second Edition.
[2]. Trương Phước Nhân, Các bài toán về giao của một họ tập – phần 1, 25/07/2017