Định lý Perron – Frobenius

Trương Phước Nhân, 29/08/2017

Bài toán : (Perron – Frobenius) Mọi ma trận vuông có tất cả các phần tử đều dương có duy nhất một giá trị riêng với các thành phần lớn hơn 0; giá trị riêng tương ứng có số bội bằng 1 và có modun lớn nhất trong tất cả các giá trị riêng

Chứng minh:

Giả sử $A=\left(a_{ij}\right)_{i,j=1,2,...,n}$ là một ma trận vuông có tất cả các phần tử đều dương.

Nhận thấy rằng khẳng định của bài toán tương đương với việc chỉ ra rằng tồn tại duy nhất $v\in[0;\infty)^n, v\neq 0$ sao cho $Av=\lambda v$ với một vô hướng λ nào đó. Hiển nhiên, do ma trận A có tất cả các phần tử đều dương và vector v có các thành phần dương, λ là một số dương và đồng thời $\lambda=\dfrac{\|Av\|}{\|v\|}$ (tính thuần nhất của chuẩn Euclide)

Đặt $K=[0;\infty)^n\cap S^n$, trong đó $S^n=\left\{x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right):\|x\|=1\right\}$ là mặt cầu đơn vị n chiều. Khẳng định thứ nhất trong bài toán tương đương với việc ánh xạ $f:K\to K$, $f(v)=\dfrac{Av}{\|Av\|}$ có duy nhất một điểm bất động.

Ta cần đến định lý ánh xạ co Banach trong lý thuyết không gian metric để chứng minh điều vừa phân tích trên :

(Banach) Một hàm số co bất kì trên một không gian metric đầy đủ có duy nhất một điểm bất động

Nhắc lại rằng một không gian metric là một tập X được trang bị một ánh xạ $\delta: X\times X\to[0;\infty)$, gọi là metric, thỏa mãn :

i) $\delta(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y$

ii) $\delta(x,y)=\delta(y,x)$ với mọi $x,y\in X$

iii) $\delta(x,z)\le\delta(x,y)+\delta(y,z)$ với mọi $x,y,z\in X$

Một không gian metric X được gọi là *đầy đủ* nếu mọi dãy Cauchy đều có giới hạn trong X.

Một ánh xạ $f:X\to X$ gọi là *co* nếu $\delta\left(f(x),f(y)\right)\le c\delta(x,y)$ với mọi $x\neq y$, trong đó c là một hằng số và $0<c<1$.

Theo đó ta cần tìm một metric trên K sao cho f là ánh xạ co theo metric đó. Ta xem xét *metric Hilbert* được cho bởi công thức dưới đây :

$$\delta(x,y)=\ln\left(\frac{\max\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}}{\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}}\right)\text{, trong đó } x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right) \text{ và } y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)\in K$$

Dễ dàng chứng minh được rằng ánh xạ δ nêu trên thỏa mãn các tiên đề i) và ii) của một metric, tiên đề iii) suy ra từ hai đánh giá $\max\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}\max\limits_i\left\{\dfrac{y_i}{z_i}\right\}\ge\max\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{z_i}\right\}$ và $\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}\min\limits_i\left\{\dfrac{y_i}{z_i}\right\}\le\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{z_i}\right\}$

Ta chứng minh f là ánh xạ co theo metric δ. Giả sử $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right), y=\left(y_1,y_2,...,y_n\right)$ thuộc K với $x\neq y$; nếu $\alpha_i>0$ với $i=1,2,...,n$ thì $\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}<\dfrac{\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+...+\alpha_nx_n}{\alpha_1y_1+\alpha_2y_2+...+\alpha_ny_n}<\max\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}$

Thật vậy, bất đẳng thức thứ nhất suy ra từ sự kiện $y_i\min\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}\le x_i$, $i=1,2,...,n$ và do $x\neq y$ nên có ít nhất một bất đẳng thức là ngặt. Lập luận tương tự bất đẳng thức thứ hai suy ra từ sự kiện $y_i\max\limits_i\left\{\dfrac{x_i}{y_i}\right\}\ge x_i, i=1,2,...,n$ và một đánh giá là ngặt.

Sử dụng đánh giá nêu ở trên ta suy ra với mọi chỉ số $j, 1 \le j \le n$ ta có :

$$\frac{\frac{a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n}{a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n}}{\max_i \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}} < 1 < \frac{\frac{a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n}{a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n}}{\min_i \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}}$$

$$\Rightarrow \frac{\max_i \left\{ \frac{a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n}{a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n} \right\}}{\max_i \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}} < 1 < \frac{\min_i \left\{ \frac{a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n}{a_{j1}y_1 + \ldots + a_{jn}y_n} \right\}}{\min_i \left\{ \frac{x_i}{y_i} \right\}}$$

Từ đánh giá trên ta suy ra : $\delta\left(f(x), f(y)\right) < \delta(x, y)$ với mọi $x \ne y$ thuộc K

Nhận thấy K là đóng và nhưng không bị chặn theo metric Hilbert . Bằng cách đặt K_0 là bao đóng của $f(K)$ theo metric Hilbert thì không gian K_0 là đóng và bị chặn.

Do đó, ánh xạ $\phi : K \times K \to [0, \infty)$, $\phi(x, y) = \frac{\delta\left(f(x), f(y)\right)}{\delta(x, y)}$ đạt được giá trị lớn nhất c. Do ϕ thật sự nhỏ hơn 1 nên $c < 1$. Điều này chỉ ra rằng f là một ánh xạ co trên K.

Sử dụng định lý Banach ta tìm được một điểm bất động v của ánh xạ f trên K.

Tiếp theo ta cần chỉ ra rằng giá trị riêng tương ứng với vector v lớn hơn modun các giá trị riêng còn lại.

Đặt $r(A)$ là bán kính phổ của ma trận A, giá trị lớn nhất trong các modun của các giá trị riêng. Gọi λ là giá trị riêng tương ứng với $r(A)$, $|\lambda| = r(A)$. Với mỗi vector x ta kí hiệu $|x|$ là vector trong đó các thành phần là modun của các thành phần của x. Đồng thời với hai vector x, y ta kí hiệu $x \ge y$ nếu mỗi thành phần của x lớn hơn thành phần tương ứng của y. Nếu ta gọi u là vector riêng tương ứng với giá trị riêng λ thì $|Av| = |\lambda||v|$. Từ bất đẳng thức tam giác ta suy ra $A|v| \ge |Av| = r(A)|v|$. Điều này kéo theo rằng tập $K_1 = \{u \mid \|u\| = 1, u \ge 0, Au \ge r(A)u\}$ không rỗng. Do A có tất cả các phần tử dương nên $A\left(Au - r(A)u\right) \ge 0$ với mọi $u \in K_1$ nên $A(Au) \ge r(A)(Au)$ với mọi $u \in K_1$, điều này chỉ ra rằng $f(K_1) \subset K_1$. Do K_1 đóng và bị chặn nên khi ta xét thu hẹp của ánh xạ f trên K_1 ta thu được một điểm bất động, do $K_1 \subset K$ nên điểm bất động này chính là điểm bất động và ta đã chỉ ra ở phần đầu của chứng minh . Do đó $r(A)$ là giá trị riêng dương duy nhất của ma trận A.

Không thể tồn tại một giá trị riêng λ khác để $|\lambda| = r(A)$, nếu ngược lại thì với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ ma trận $A - \varepsilon I_n$ sẽ có tất cả các phần tử đều dương, nhưng giá trị riêng dương $r(A) - \varepsilon$ sẽ nhỏ hơn trị tuyệt đối của giá trị riêng $\lambda - \varepsilon$, điều này mâu thuẫn với giả thiết của. Kết thúc chứng minh.

Tài liệu tham khảo :

Titu Andreescu, Razan Gelca, PUTNAM and BEYOND, First Edition