

Bài toán phân việc tối ưu

Trương Phước Nhân, 06/02/2018

1. Đặt vấn đề: Giả sử có 4 công việc a_1, a_2, a_3, a_4 được giao cho các công việc J_1, J_2, J_3, J_4 và ta có bảng sau thể hiện mức độ hiệu quả trong công việc của các nhân viên đối với các công việc:

	J_1	J_2	J_3	J_4
a_1	11	9	1	4
a_2	8	13	7	6
a_3	12	2	14	11
a_4	10	13	15	2

Mục tiêu của ta là cần chọn phân bổ công việc cho từng người sao cho mỗi người chỉ nhận làm một công việc và mỗi công việc được giải quyết bởi một người nhưng phải đảm bảo cho tổng năng suất thu được vẫn là lớn nhất. Nói một cách khác, ta cần tìm ra 4 số từ bảng trên sao cho không có 2 số nào nằm cùng một hàng hay cùng một cột và tổng các số được chọn là lớn nhất.

Ý tưởng của ta ở đây là thay vì xét tính hiệu quả thì ta xét mức độ không phù hợp (lưu ý, tính không phù hợp ở đây có thể hiểu một cách nôm na là không nên loại họ ra khỏi sự lựa chọn) của các công nhân và cố gắng làm giảm đi tổng các số được chọn từ bảng sau:

	J_1	J_2	J_3	J_4
a_1	-11	-9	-1	-4
a_2	-8	-13	-7	-6
a_3	-12	-2	-14	-11
a_4	-10	-13	-15	-2

Do ta chỉ chọn ra chính xác một phần tử từ mỗi hàng, mỗi cột và rõ ràng là nếu ta thêm vào (hoặc bớt ra) tất cả các số hạng trong cùng một hàng (hoặc cùng một cột) thì sự lựa chọn vẫn được giữ nguyên mặc dù là tổng của các phần tử được lựa chọn bị thay đổi. Ta thêm 11 vào tất cả các phần tử của hàng thứ nhất; tương tự ta lần lượt thêm 13, 14 và 15 vào tất cả các phần tử của hàng thứ 2, 3, và 4; sau cùng trừ 3 tất cả các phần tử của hàng cuối cùng ta thu được bảng sau:

	J_1	J_2	J_3	J_4
a_1	0	2	10	4
a_2	5	0	6	4
a_3	2	12	0	0
a_4	5	2	0	10

Ta chú ý rằng tất cả các phần tử của bảng này đều không âm. Do đó, nếu chúng ta có thể tìm thấy 4 số 0 sao cho không có 2 số nào cùng hàng hoặc cùng cột thì điều đó cho ta một sự lựa chọn tối ưu. Trong ví dụ của chúng ta thì ta nên chọn a_1 làm công việc J_1 , a_2 làm công việc J_2 , a_3 làm công việc J_4 và a_4 làm công việc J_3 .

2. Phương pháp giải quyết vấn đề phân việc tối ưu tổng quát:

Bài toán phân việc tối ưu:

Giả sử có n người $a_1, a_2, \dots, a_n$ cần làm các công việc $J_1, J_2, \dots, J_n$ và ta cũng có một bảng kích thước $n \times n$ thể hiện mức độ hiệu quả trong công việc. Câu hỏi đặt ra là ta phải phân công các công việc cho n người này như thế nào để đảm bảo mỗi người được nhận làm một công việc, mỗi công việc được giải quyết bởi một người và tổng hiệu quả của các công việc là lớn nhất? (để đơn giản hóa vấn đề các chỉ số đánh giá năng suất được xét là các chỉ số nguyên)

Bằng phương pháp lập luận tương tự như trong ví dụ dẫn nhập bằng các phép tính ta sẽ thu được một bảng A kích thước $n \times n$ thể hiện mức độ không phù hợp sao cho tất cả các phần tử trên bảng là các số không âm và có ít nhất một số 0 trên mỗi hàng và mỗi cột.

Nếu như ta có thể tìm được n số 0 - độc lập (hai số 0 bất kì không nằm trên cùng một hàng hay cùng một cột) thì bài toán của ta được giải quyết. Trong trường hợp ngược lại ta cần đến một kết quả cơ cấp sau phụ trợ cho quá trình phân tích bài toán :

Định lý Konig – Egervary: Cho A là một ma trận kích thước $m \times n$.

Khi đó : Số lớn nhất các số 0 - độc lập bằng với số nhỏ nhất các hàng và các cột cần thiết để phủ hết tất cả các số 0 của bảng A .

Chứng minh: Ta đặt α là số lớn nhất các số 0 - độc lập và β là số nhỏ nhất các hàng và các cột cần thiết để phủ hết tất cả các số 0. Hiển nhiên $\beta \geq \alpha$, bởi vì ta có thể tìm được α số không độc lập trong A , và các hàng hoặc cột của phép phủ tối thiểu phải phủ ít nhất một trong số các số 0 này.

Ta cần chỉ ra rằng $\alpha \geq \beta$. Giả sử ta cần a hàng và b cột để phủ hết tất cả các số 0 và $a + b = \beta$. Bởi vì việc hoán vị các cột và các hàng không làm thay đổi các giá trị α và β nên không mất tính tổng quát ta có thể giả sử là a hàng đầu và b cột đầu phủ hết tất cả các số 0. Ta biểu diễn bảng A dưới dạng :

$$A = \begin{pmatrix} C_{a \times b} & D_{a \times (n-b)} \\ E_{(m-a) \times b} & F_{(m-a) \times (n-b)} \end{pmatrix} \quad (*)$$

Khi đó ta biết rằng không có số 0 nào được chứa trong F . Ta sẽ chứng minh rằng có a số 0 - độc lập trong D . Lập luận tương tự, bởi tính đối xứng, sẽ có b số 0 - độc lập nằm trong E . Do đó tổng cộng ta có $a + b$ số 0, hiển nhiên các số 0 này độc lập với nhau, nên $\alpha \geq a + b = \beta$.

Ta sẽ chứng minh điều phân tích trên bằng kỹ thuật sử dụng định lý Hall.

Đặt $S_i = \{j \mid d_{ij} = 0\} \subseteq \{1, 2, \dots, n-b\}$, tập hợp các vị trí của các số 0 nằm trên cột thứ i của $D = (d_{ij})$.

Khi đó : $S_1, S_2, \dots, S_a$ có một hệ đại diện phân biệt, có nghĩa là ta có thể chọn một số 0 từ mỗi hàng sao cho không có 2 số nào nằm trên cùng cột. Giả sử ngược lại, theo định lý Hall ta sẽ có hợp của một số k nào đó các tập nào có số phần tử ít hơn k phần tử, điều đó có nghĩa là các số 0 ở các hàng này có thể được phủ bởi một số $s < k$ cột. Nhưng như vậy thì ta có thể thu được một cách phủ tất cả các số 0 của A bởi một lượng hàng và cột nhỏ hơn $a + b$, mâu thuẫn.

Từ định lý trên ta thấy nếu số lớn nhất các số 0 - độc lập của bảng A là $r < n$ thì tồn tại các số nguyên không âm a và b sao cho $a + b = r$ sao cho tất cả các số 0 của bảng A được phủ bởi a hàng và b cột. Nếu ta vẫn tiếp tục giả sử là a hàng đầu và b cột đầu và biểu diễn A như trong (*), thì ta gọi s là số có giá trị nhỏ nhất nằm trong F . Ta thực hiện phép cộng s cho tất cả các phần tử ở a hàng đầu tiên (tất cả các phần tử của nằm trong C và D) và ta trừ đi s từ $n-b$ cột sau (tất cả các phần tử nằm trong D và F).

Như vậy ta nhận thấy tất cả các phần tử của C tăng lên s và tất cả các phần tử của F giảm đi s và tất cả các phần tử còn lại không đổi.

Như vậy, tổng tất cả các phần tử của bảng giảm đi một lượng $(n-a)(n-b)s - abs = n(n-a-b)s > 0$, bởi vì $a + b = r < n$. Nếu A' vẫn chưa chứa n số 0 - độc lập thì ta tiếp tục áp dụng thủ thuật vừa trình bày. Thuật toán này phải dừng sau hữu hạn bước, bởi vì tổng tất cả các phần tử của bảng giảm thực sự sau mỗi bước và tổng này không thể âm.

Tài liệu tham khảo :

- [1]. Ian Anderson, Ashort Course in Combinatorial Designs, ??/??/2012
- [2]. Trương Phước Nhân, Định lý Hall – Định lý Konig, 24/07/2017
- [3]. Trương Phước Nhân, Định lý Konig – Egervary, 05/08/2017