Bổ đề Sauer - Shelah

Trương Phước Nhân, 08/02/2018

Cho $\mathcal{F}=\{S_1,S_2,...\}$ là một họ các tập con của một tập S, và A là một tập con bất kỳ thuộc S, thì ta nói A là *shatter* bởi $\mathcal{F}$ nếu mọi tập con của A (bao gồm tập rỗng và chính bản thân tập A) đều có thể biểu diễn dưới dạng $S_i\cap A$ với $S_i\in\mathcal{F}$. Kí hiệu $\mathcal{F}\cap A=\{S_i\cap A\,|\,S_i\in\mathcal{F}\}$

Số chiều VC (Vapnik – Chervonenkis) của một họ không rỗng $\mathcal{F}$ là số nguyên lớn nhất n sao cho tồn tại một tập A với $|A|=n$ và $|\mathcal{F}\cap A|=2^n$, hay nói cách khác là kích thước lớn nhất có thể có của một tập A bị shatter bởi $\mathcal{F}$. Nếu không tồn tại số nguyên dương n như vậy thì ta nói rằng số chiều VC của $\mathcal{F}$ là ∞, hay nói cách khác với mọi số nguyên n ta đều tìm được một tập $A\subset S$ sao cho $|A|=n$ và $|\mathcal{F}\cap A|=2^n$.

Ta nói rằng $\mathcal{F}$ có một cặp (A,B) tại p ($p\in S$) nếu như ta có thể tìm được hai tập $A,B\in\mathcal{F}$ sao cho $A\setminus B=\{p\}$ và $B\subset A$. Ta đưa vào các kí hiệu sau:

$$P_1(\mathcal{F},p)=\{A\in\mathcal{F}:(A,B) \text{ là một cặp tại } p \text{ với một tập } B\in\mathcal{F} \text{ nào đó }\}$$

$$P_2(\mathcal{F},p)=\{B\in\mathcal{F}:(A,B) \text{ là một cặp tại } p \text{ với một tập } A\in\mathcal{F} \text{ nào đó }\}$$

Kết quả 1: $|P_1(\mathcal{F},p)|=|P_2(\mathcal{F},p)|$

Chứng minh :

Ta xây dựng một ánh xạ từ $P_1(\mathcal{F},p)$ vào $P_2(\mathcal{F},p)$ như sau : Với mỗi $A\in P_1(\mathcal{F},p)$ cho tương ứng với $A\setminus\{p\}\in P_2(\mathcal{F},p)$. Dễ dàng thử lại rằng ánh xạ này là một song ánh.

Kết quả 2: Nếu $\mathcal{G}\subset\mathcal{F}$ và $\mathcal{G}$ có số chiều VC là n thì $\mathcal{F}$ cũng có số chiều VC ít nhất là n

Chứng minh :

Gỉa sử họ $\mathcal{G}$ có số chiều VC là n thì tồn tại một tập $A\subset S$ sao cho $\mathcal{G}\cap A=2^A$. Nhưng như vậy thì ta có $2^A=\mathcal{G}\cap A\subset\mathcal{F}\cap A\subset 2^A$, hay $\mathcal{F}\cap A=2^A$

Kết quả 3: Nếu $\mathcal{F}$ là một họ tập con của một tập hữu hạn S thì $|\mathcal{F}|-|\mathcal{F}_p|=|P_2(\mathcal{F},p)|$, trong đó $\mathcal{F}_p:=\mathcal{F}\cap\{S\setminus p\}$.

Chứng minh :

Nhận thấy rằng ta có thể biểu diễn $\mathcal{F}_p$ dưới dạng $\mathcal{F}_p=\{F\in\mathcal{F}:p\notin F\}\cup\{H\setminus\{p\}:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}$.

Áp dụng công thức bao hàm – loại trừ, ta có thể viết :

$$|\mathcal{F}_p|=|\{F\in\mathcal{F}:p\notin\mathcal{F}\}|+|\{H\setminus\{p\}:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}|-|\{F\in\mathcal{F}:p\notin F\}\cap\{H\setminus\{p\}:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}|$$

Dùng kĩ thuật song ánh ta sẽ dễ dàng chỉ ra rằng : $|\{H\setminus\{p\}:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}|=|\{H:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}|$

(bằng cách xét phép tương ứng từ $\{H\setminus\{p\}:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}$ vào $\{H:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}$ như sau: $F\mapsto F\cup\{p\}$). Do đó ta suy ra :

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_p|&=|\{F\in\mathcal{F}:p\notin F\}|+|\{H:H\in\mathcal{F} \text{ và } p\in H\}|-|P_2(\mathcal{F},p)|\\&=|\mathcal{F}|-|P_2(\mathcal{F},p)|\end{aligned}$$

Kết quả 4: Nếu $P_2(\mathcal{F},p)$ có số chiều VC là $n-1$ trong tập $S\setminus\{p\}$ thì số chiều VC của $\mathcal{F}$ trong S ít nhất là bằng n

Chứng minh :

Ta sẽ chứng minh rằng nếu $P_2(\mathcal{F},p)$ có số chiều VC trong $S\setminus\{p\}$ là $n-1$ thì $\mathcal{G}=P_1(\mathcal{F},p)\cup P_2(\mathcal{F},p)$ có số chiều VC trong S ít nhất là bằng n.

Theo định nghĩa của số chiều VC ta tìm được một tập $A\subset S\setminus\{p\}$ sao cho $|A|=n-1$ và $P_2(\mathcal{F},p)\cap A=2^A$.

Đặt $B:=A\cup\{p\}$. Ta sẽ chỉ ra rằng $\mathcal{G}\cap B=2^B$.

Gỉa sử ngược lại, khi đó tồn tại một tập $H\subset B$ sao cho $H\notin\mathcal{G}\cap B$. Ta khẳng định rằng: $p\in H$, bởi vì nếu ngược lại, $H\subset A$ nên $H\in P_2(\mathcal{F},p)\cap A\subset\mathcal{G}\cap A\subset\mathcal{G}\cap B$, mâu thuẫn với giả thiết.

Từ việc $p \in H$ suy ra: $H \setminus \{p\} \subset A$, kéo theo $H \setminus \{p\} \in P_2(\mathcal{F}, p) \cap A$. Do đó, tồn tại một tập $L \in P_2(\mathcal{F}, p)$ sao cho $L \cap A = H \setminus \{p\}$. Do $L \in P_2(\mathcal{F}, p)$, nên tồn tại một tập $M \in \mathcal{F}$ sao cho (M, L) là một cặp tại p. Nhận thấy : $M \cap B = (L \cup \{p\}) \cap (A \cup \{p\}) = (L \cap A) \cup \{p\} = (H \setminus \{p\}) \cup \{p\} = H$. Điều này dẫn đến sự mâu thuẫn, bởi vì $H = M \cap B \in P_2(\mathcal{F}, p) \cap B \subset \mathcal{G} \cap B$.

<u>Kết quả 5:</u>
Nếu số chiều VC của họ $\mathcal{F}$ gồm các tập con của một tập hữu hạn S, với $|S| = m$, nhỏ hơn n thì

$|\mathcal{F}| \le \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i}$.

Hơn nữa, đánh giá là chặt nghĩa là tồn tại một họ $\mathcal{F}$ các tập con của S với $|\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i}$ sao cho số chiều VC của họ $\mathcal{F}$ bằng n, trong đó $m \ge n \ge 1$.

<u>Chứng minh :</u> Ta chứng minh bằng phương pháp quy nạp theo $m - n$ và n.
Nếu $n = 1$ thì khẳng định của bài toán là hiển nhiên.
Nếu $n = m$ thì bởi vì số chiều VC của $\mathcal{F}$ nhỏ hơn n nên $\mathcal{F} \subsetneq 2^S$, như vậy

$$\sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} = 2^n - \binom{n}{n} = 2^n - 1 \ge |\mathcal{F}|$$

Ta giả sử rằng khẳng định của bài toán là đúng với mọi $1 \le l < n$ và $0 \le k < m - n$. Gỉa sử phản chứng rằng $|\mathcal{F}| > \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i}$. Ta sẽ chỉ ra rằng số chiều VC của $\mathcal{F}$ ít nhất là bằng n.

Với $p \in S$, ta xét họ $\mathcal{F}_p$ trong tập $S \setminus \{p\}$.

i) Nếu $|\mathcal{F}_p| > \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m-1}{i}$ thì theo giả thiết quy nạp theo $m - n$, bởi vì $|S \setminus \{p\}| - n = (m-1) - n = k - 1$, kéo theo $\mathcal{F}$ có số chiều VC ít nhất n trong S.

ii) Nếu $|\mathcal{F}_p| \le \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m-1}{i}$, bằng cách sử dụng kết quả 3) suy ra

$$\begin{aligned}
|P_2(\mathcal{F}, p)| = |\mathcal{F}| - |\mathcal{F}_p| &> \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i} - \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m-1}{i} \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \binom{m-1}{i-1} + \binom{m-1}{i} \right\} - 1 - \sum_{i=1}^{n-1} \binom{m-1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{m-1}{i-1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-2} \binom{m-1}{i} \text{ (trong đó ta sử dụng hằng đẳng thức } \binom{m}{i} = \binom{m-1}{i-1} + \binom{m-1}{i} \text{)}
\end{aligned}$$

Áp dụng giả thiết quy nạp theo n, ta suy ra $P_2(\mathcal{F}, p)$ có số chiều VC ít nhất là $n - 1$ trong $S \setminus \{p\}$. Từ kết quả 4) suy ra $\mathcal{F}$ có số chiều VC ít nhất là n.

Để chỉ ra sự tồn tại của một họ $\mathcal{F}$ như trong khẳng định của bài toán, không làm mất tính tổng quát, ta xét tập $S = \{1, 2, ..., m\}$. Xét họ $\mathcal{F}$ gồm tập rỗng và tất cả các k - tập , trong đó $1 \le k \le n - 1$. Ta dễ dàng nhận thấy rằng $|\mathcal{F}| = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{m}{i}$. Ta khẳng định rằng $\mathcal{F}$ có số chiều VC bằng $n - 1$. Gỉa sử $A \subset S$ có lực lượng $k \ge n$. Không giảm tính tổng quát, ta có thể đặt $A = \{1, 2, ..., k\}$. Khi đó $A \notin \mathcal{F} \cap A$, bởi vì $\mathcal{F}$ không chứa các k - tập con , điều đó suy ra rằng $|\mathcal{F} \cap A| \le 2^{|A|} - 1 = 2^k - 1$. Do vậy $\mathcal{F}$ có số chiều VC tối đa là $n - 1$. Nếu ta chọn $A = \{1, ..., n-1\}$ thì mọi tập con của A đều được chứa trong $\mathcal{F}$, điều đó dẫn đến $2^A \subset \mathcal{F} \cap A \subset 2^A$.

Kết quả 6: Nếu $\mathcal{F}$ là một họ các tập con của một tập vô hạn S, thì số chiều VC của $\mathcal{F}$ hoặc là bằng ∞ hoặc tồn tại một số tự nhiên N sao cho với mọi tập $A \subset S$ với $|A| \geq N$ ta có $|\mathcal{F} \cap A| \leq \sum_{i=0}^{N-1} \binom{|A|}{i}$

Chứng minh : Nếu với mỗi số tự nhiên n ta đều tìm được một tập $A \subset S$ với $|A| = n$ và $|\mathcal{F} \cap A| > \sum_{i=0}^{n-1} \binom{|A|}{i}$.

Áp dụng kết quả 5) ta suy ra số chiều VC của họ $\mathcal{F}$ ít nhất là bằng n, hay nói cách khác số chiều VC của $\mathcal{F}$ bằng ∞.

Tài liệu tham khảo :

[1]. Wikipedia, Sauer – Shelah lemma, ??/??/??
[2]. N. Sauer, On the density of families of sets, 04/02/1970
[3]. Matt Rosenzweig, Sauer’s lemma, ??/??/??