Định lý Cayley – Hamilton

Trương Phước Nhân, 08/05/2018

Bài toán. (Cayley – Hamilton) Mọi ma trận A cấp $n\times n$ đều thỏa mãn phương trình đặc trưng của nó, điều đó có nghĩa là nếu $P_A(\lambda)=\det(\lambda\mathcal{I}_n-A)$ thì $P_A(A)=\mathcal{O}_n$.

Chứng minh.

Đặt $P_A(\lambda)=\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_0$ và $(\lambda\mathcal{I}_n-A)^*$ là ma trận phụ hợp của $(\lambda\mathcal{I}_n-A)$.

Khi đó

$$(\lambda\mathcal{I}_n-A)(\lambda\mathcal{I}_n-A)^*=\det(\lambda\mathcal{I}_n-A)\mathcal{I}_n.$$

Do các phần tử của ma trận phụ hợp $(\lambda\mathcal{I}_n-A)^*$ là các đa thức có bậc không vượt quá $n-1$ theo λ nên bằng cách tách ma trận theo các lũy thừa của λ ta thu được biểu diễn

$$(\lambda\mathcal{I}_n-A)^*=B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots+B_0.$$

Bằng cách đồng nhất hệ số của các lũy thừa λ ở hai vế của phương trình

$$(\lambda\mathcal{I}_n-A)(B_{n-1}\lambda^{n-1}+B_{n-2}\lambda^{n-2}+\ldots+B_0)=\det(\lambda\mathcal{I}_n-A)\mathcal{I}_n,$$

ta thu được các phương trình

$$\begin{gathered}B_{n-1}=\mathcal{I}_n,\\ -AB_{n-1}+B_{n-2}=a_{n-1}\mathcal{I}_n,\\ -AB_{n-2}+B_{n-3}=a_{n-2}\mathcal{I}_n,\\ \ldots\\ -AB_1+B_0=a_1\mathcal{I}_n,\\ -AB_0=a_0\mathcal{I}_n.\end{gathered}$$

Nhân phương trình thứ nhất với A^n, phương trình thứ hai với A^{n-1}, phương trình thứ ba với A^{n-2}, ..., sau đó thực hiện cộng tất cả $n+1$ phương trình ta thu được

$$\mathcal{O}_n=A^n+a_{n-1}A^{n-1}+a_{n-2}A^{n-2}+\ldots+a_0\mathcal{I}_n.$$

Kết quả sau cùng chỉ ra rằng $P_A(A)=\mathcal{O}_n$.

Tài liệu tham khảo.

Titu Andreescu – Razan Gelca (2007), PUTNAM and BEYOND, Springer.