Bài toán chéo hóa

Trương Phước Nhân, 10/05/2018

Mục tiêu chính của bài viết này là chỉ ra một điều kiện cần và đủ để một tự đồng cấu có một cơ sở sao cho trong cơ sở này tự đồng cấu có ma trận đơn giản, cụ thể là càng gần ma trận chéo càng tốt.

Giả sử X là một không gian vector trên trường $\mathbb{K}$ và tự đồng cấu $f : X \to X$. Việc khảo sát f trên toàn không gian X đôi khi quá khó khăn. Ý tưởng tự nhiên xuất hiện là ta sẽ hạn chế f lên một số không gian con U nào đó của X. Nhưng để cho việc hạn chế này vẫn còn là một tự đồng cấu của U thì không gian con phải có một tính chất đặc biệt nói dưới đây:

Không gian vector con U của X được gọi là một ***không gian con ổn định đối với*** f nếu $f(U) \subset U$.

Dễ dàng thấy rằng, với mỗi ánh xạ tuyến tính f thì $\operatorname{Im} f$ và $\operatorname{Ker} f$ là những không gian con ổn định.

Tiếp theo ta sẽ giải thích lại cụ thể hơn ý tưởng nêu ở đầu bài, giả sử f là một tự đồng cấu của một không gian n- chiều X với không gian con ổn định L với số chiều bằng m. Chọn cơ sở $e_1, e_2, ..., e_n$ trong X sao cho m vector đầu thuộc L. Khi đó các ảnh $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_m)$ của các vector $e_1, e_2, ..., e_m$ cũng thuộc L và có thể phân tích chúng theo các vector $e_1, e_2, ..., e_m$ như là các vector cơ sở của L. Thành thử,

$$f(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + ... + a_{m1}e_m,$$
$$f(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{m2}e_m,$$
$$...$$
$$f(e_m) = a_{1m}e_1 + a_{2m}e_2 + ... + a_{mm}e_m.$$

Ta nhắc lại rằng các phần tử thuộc các cột của ma trận của một ánh xạ tuyến tính trùng với các tọa độ những vector ảnh của cơ sở. Do đó ma trận A của ánh xạ tuyến tính f trong cơ sở $e_1, e_2, ..., e_m$ sẽ có dạng

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} & a_{1,m+1} & a_{1,m+2} & ... & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} & a_{2,m+1} & a_{2,m+2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mm} & a_{m,m+1} & a_{m,m+2} & ... & a_{m,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{m+1,m+1} & a_{m+1,m+2} & ... & a_{m+1,n} \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{m+2,m+1} & a_{m+2,m+2} & ... & a_{m+2,n} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & a_{n,m+1} & a_{n,m+2} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Thông thường các ma trận có dạng như trên được viết dưới dạng thu gọn như sau $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, trong đó A_{11} là ma trận cấp $m \times m$, A_{22} là ma trận cấp $(n-m)\times(n-m)$, 0 là ma trận không cấp $(n-m)\times m$, A_{12} là ma trận cỡ $m\times(n-m)$.

Bây giờ nếu may mắn ta có thể phân tích không gian X thành tổng trực tiếp của các không gian con ổn định L và M, có nghĩa là $X = L + M$. Chọn cơ sở $e_1, e_2, ..., e_n$ trong X sao cho m vector đầu của nó thuộc L, còn $n-m$ vector còn lại thuộc M. Khi đó các ảnh $f(e_1), f(e_2), ..., f(e_m)$ có thể phân tích chỉ theo các vector $e_1, e_2, ..., e_m$ còn các ảnh $f(e_{m+1}), f(e_{m+2}), ..., f(e_n)$ được phân tích theo các vector $e_{m+1}, e_{m+2}, ..., e_n$. Ma trận A_{12} rõ ràng bằng không. Vì vậy ma trận A trong cơ sở đang xét có dạng còn đơn giản hơn, cụ thể là $A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$.

Tuy nhiên, một không gian con ổn định nói chung không có phần bù tuyến tính cũng là một không gian con ổn định.

Một câu hỏi được đặt ra là làm thế nào để tìm các không gian con ổn định đối với một tự đồng cấu đã cho? Thật không may mắn là không có một phương pháp chung nào để làm điều đó trong trường hợp tổng quát.

Sau đây ta sẽ xét trường hợp đặc biệt đó là các không gian con ổn định một chiều:

Giả sử L là một không gian con ổn định một chiều của f và $\alpha \in L$ là một vector khác 0. Khi đó (α) là một cơ sở của L. Do $f(L) \subset L$ nên có một vô hướng $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho $f(\alpha) = \lambda\alpha$. Ngược lại, nếu có một vector $\alpha \neq 0$ và một vô hướng $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho $f(\alpha) = \lambda\alpha$ thì $L = \operatorname{span}(\alpha)$ là một không gian con ổn định một chiều của f.

Ta đi tới định nghĩa sau đây:

Giả sử f là một tự đồng cấu của không gian vector X. Nếu có vector $\alpha \neq 0$ và vô hướng $\lambda \in \mathbb{K}$ sao cho $f(\alpha) = \lambda\alpha$ thì λ được gọi là một ***giá trị riêng*** của f còn α được gọi là một ***vector riêng*** của f ứng với giá trị riêng λ.

Như vậy việc tìm các không gian con ổn định một chiều tương đương với việc tìm các vector riêng.

Nhận xét rằng các vector riêng của f ứng với giá trị riêng λ cùng với vector 0 lập nên không gian vector con $\operatorname{Ker}(f - \lambda id_X)$.

Giả sử λ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $f : X \to X$. Không gian vector $\operatorname{Ker}(f - \lambda id_X)$ gồm vector 0 và tất cả các vector riêng của f ứng với giá trị riêng λ được gọi là ***không gian con riêng của*** f ***ứng với giá trị riêng*** λ.

Kết quả 1. Giả sử $f : X \to X$ là một tự đồng cấu và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ là các giá trị riêng đôi một phân biệt của tự đồng cấu f. Khi đó các không gian con riêng của f tương ứng với $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ có tổng trực tiếp.

Chứng minh. Định lý được chứng minh bằng quy nạp theo N.

Với $N = 1$, khẳng định của mệnh đề là hiển nhiên.

Giả sử khẳng định của mệnh đề đã được kiểm chứng cho N vector riêng và $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{N+1}$ là các giá trị riêng của f từng đôi một phân biệt. Bây giờ ta giả sử tìm được $(x_i)_{1 \le i \le N+1} \in X^{N+1}$ sao cho

$$\begin{cases} x_i \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i id_X), \forall i \in \{1, 2, ..., N+1\} \\ \sum_{i=1}^{N+1} x_i = 0 \end{cases}.$$

Bằng cách tác dụng f vào hai vế của đẳng thức ta thu được $0 = \sum_{i=1}^{N+1} f(x_i) = \sum_{i=1}^{N+1} \lambda_i x_i$, bởi vì $x_i \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i id_X)$ nên $f(x_i) = \lambda_i x_i$.

Do đó ta thu được: $\begin{cases} x_1 + ... + x_N + x_{N+1} = 0 \\ \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_N x_N + \lambda_{N+1} x_{N+1} = 0 \end{cases}$.

Từ đây ta suy ra được: $(\lambda_{N+1} - \lambda_1)x_1 + (\lambda_{N+1} - \lambda_2)x_2 + ... + (\lambda_{N+1} - \lambda_N)x_N = 0$.

Theo giả thiết quy nạp các không gian $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i id_X)$ $(1 \le i \le N)$ có tổng trực tiếp và $(\lambda_{N+1} - \lambda_i)x_i \in \operatorname{Ker}(f - \lambda_i id_X)$ $(1 \le i \le N)$. Do $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_N$ từng đôi một phân biệt nên từ đây ta suy ra $x_i = 0$ $(1 \le i \le N)$ và cuối cùng $x_{N+1} = -\sum_{i=1}^{N} x_i = 0$.

Điều này chứng minh rằng các không gian $\operatorname{Ker}(f - \lambda_i id_X)$ $(1 \le i \le N+1)$ có tổng trực tiếp.

Vấn đề đặt ra cho chúng ta là làm thế nào để tìm các vector riêng và các giá trị riêng của một tự đồng cấu.

Nhận xét rằng λ là một giá trị riêng của f nếu và chỉ nếu $\operatorname{Ker}(f - \lambda id_X) \neq \{0\}$. Điều này tương đương với $\det(f - \lambda id_X) = 0$. Nói cách khác, λ là một nghiệm của đa thức $\det(f - \lambda id_X)$ theo ẩn λ.

Từ các phân tích trên ta thu được kết quả sau.

Kết quả 2. Vô hướng $\lambda \in \mathbb{K}$ là một giá trị riêng của tự đồng cấu $f : X \to X$ nếu và chỉ nếu λ là một nghiệm của đa thức đặc trưng $\det(f - \lambda id_X) = \det(A - \lambda I_n)$ của f.

Một điểm cần phải giải thích ở đây đó chính là khẳng định $\det(f - \lambda id_X)$ là một đa thức theo ẩn λ.

Giả sử số chiều của X bằng m và f có ma trận là A trong cơ sở $(e_1, e_2, ..., e_m)$ nào đó của X. Khi đó đồng cấu $(f - \lambda id_X)$ có ma trận là $(A - \lambda I_n)$ trong cơ sở trên. Vì thế

$$\det(f - \lambda id_X) = \det(A - \lambda I_n).$$

Nếu $A = (a_{ij})_{n \times n}$ thì

$$\det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$$

rõ ràng là một đa thức bậc n theo ẩn λ.

Đa thức bậc n theo biến λ với hệ số trong $\mathbb{K}$ $P_f(\lambda) = \det(f - \lambda id_X)$ được gọi là ***đa thức đặc trưng*** của tự đồng cấu f.

Kết quả sau cung cấp một mô tả cụ thể hơn của đa thức đặc trưng $P_f(\lambda)$.

Kết quả 3. Giả sử $A \in M_n(\mathbb{K})$ và số tự nhiên $n \geq 2$.

Khi đó: $P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A) \lambda^{n-1} + \dots + \det A$.

Chứng minh.

Đặt $b_{ij} = \begin{cases} a_{ii} - \lambda \text{ nếu } i = j \\ a_{ij} \quad \text{ nếu } i \neq j \end{cases}$. Bằng cách áp dụng công thức Leibniz cho định thức ta thu được kết quả

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn} \sigma . b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)}.$$

Với mọi $\sigma \in S_n \setminus id_{\{1,2,\dots,n\}}$, số hạng $\operatorname{sgn} \sigma . b_{1\sigma(1)} b_{2\sigma(2)} \dots b_{n\sigma(n)}$ là một đa thức có bậc $\leq n - 2$ theo biến λ.

Mặt khác, $b_{11} b_{22} \dots b_{nn} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda) = (-\lambda)^n + (a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn})(-\lambda)^{n-1} + \dots$.

Điều này chứng tỏ rằng $P_A(\lambda)$ có bậc n và các hệ số của λ^n và λ^{n-1} tương ứng là $(-1)^n$ và $(-1)^{n-1} \operatorname{tr}(A)$.

Sau cùng, vì $\det A = P_A(0)$ nên số hạng tự do của đa thức $P_A(\lambda)$ là $\det A$.

Tiếp theo, ta chỉ ra một đánh giá đơn giản cho số chiều của một không gian con riêng như sau.

Kết quả 4. Giả sử f là một tự đồng cấu của không gian vector X, λ_k là một giá trị riêng của f với số bội s_k trong đa thức đặc trưng và $d_k = \dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_k id_X)$. Khi đó $1 \leq d_k \leq s_k$.

Chứng minh.

Theo định nghĩa của giá trị riêng $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k id_X) \neq \{0\}$ nên $\dim \operatorname{Ker}(f - \lambda_k id_X) \geq 1$.

Không gian con riêng $\operatorname{Ker}(f - \lambda_k id_X)$ có ít một cơ sở $(e_1, \dots, e_{d_0})$, và bằng cách áp dụng định lý về cơ sở không đầy đủ ta tìm được $e_{d_0+1}, \dots, e_n \in X$ sao cho $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ là một cơ sở của E.

Nói cách khác, tự đồng cấu f có ma trận dạng $\begin{pmatrix} \lambda_k I_{d_k} & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ trong đó $C \in M_{d_k, n-d_k}(\mathbb{K}), B \in M_{n-d_k}(\mathbb{K})$.

Từ đó ta dễ dàng suy ra :

$$P_f(\lambda) = \begin{pmatrix} (\lambda_k - \lambda) I_{d_k} & C \\ 0 & B - \lambda I_{n-d_k} \end{pmatrix} = (\lambda_k - \lambda)^{d_k} \det(B - \lambda I_{n-d_k}) = (\lambda_k - \lambda)^{d_k} P_B(\lambda).$$

Từ kết quả tính toán vừa thu được ta suy ra: $(\lambda_k - \lambda)^{d_k} \mid P_f(\lambda) \Rightarrow d_k \leq s_k$.

Kế tiếp ta đi vào trọng tâm chính của bài viết đó là chỉ ra điều kiện cần và đủ để một tự đồng cấu có một cơ sở sao cho trong cơ sở này tự đồng cấu có ma trận chéo, khi đó ta nói rằng f là ***chéo hóa được***.

Kết quả 5. Giả sử f là một tự đồng cấu của không gian vector X. Khi đó các khẳng định sau là từng đôi một tương đương nhau:

i) f chéo hóa được.

ii) Tồn tại một cơ sở của không gian vector X được tạo nên từ các vector riêng của tự đồng cấu f.

iii) Tổng các không gian con riêng của f bằng X.

iv) Tổng các số chiều của các không gian con riêng của f bằng $\dim X$.

Chứng minh.

i)$\Rightarrow$ii) Giả sử f chéo hóa được. Khi đó ta tìm được một cơ sở $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ của không gian vector X sao cho tự đồng cấu f có ma trận chéo $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$ trong đó $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in \mathbb{K}$.

Khi đó : $f(e_i)=\lambda_i e_i$ và $e_i \neq 0$ $(1 \le i \le n)$ nên $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ là một cơ sở của X được tạo nên từ các vector riêng của f.

ii)$\Rightarrow$iii)

Giả sử tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}=(e_1,...,e_n)$ được tạo nên từ các vector riêng của f. Nói cách khác, ta tìm được $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n \in \mathbb{K}$ sao cho $f(e_i)=\lambda_i e_i$ $(1 \le i \le n)$.

Đặt $\Lambda=\{\lambda_i : 1 \le i \le n\}$.

Khi đó: $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f-\lambda id_X) \supset \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ker}(f-\lambda id_X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(f-\lambda id_X) \supset \sum_{i=1}^{n} \mathbb{K}e_i = X$.

Vậy tổng các không gian con riêng của f, chính là $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f-\lambda id_X)$, bằng X.

iii)$\Rightarrow$iv)

Giả sử tổng các không gian con riêng của f bằng X. Theo Kết quả 1 ta nhận thấy tổng này là trực tiếp nên ta có: $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \dim\mathrm{Ker}(f-\lambda id_X) = \dim\left(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} \mathrm{Ker}(f-\lambda id_X)\right) = \dim X$.

iv)$\Rightarrow$i)

Giả sử tổng các số chiều của các không gian con riêng của f bằng $\dim X$.

Kí hiệu $k=|\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)|$, $\lambda_1,...,\lambda_k$ là các phần tử của $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$.

Mỗi không gian con riêng $\mathrm{Ker}(f-\lambda_i id_X)(1 \le i \le k)$ có ít nhất một cơ sở $\mathcal{B}_i$, ta ký hiệu $\mathcal{B}=\bigcup_{i=1}^{k}\mathcal{B}_i$.

Vì các không gian con riêng $\mathrm{Ker}(f-\lambda_i id_X)(1 \le i \le k)$ có tổng trực tiếp và mỗi $\mathcal{B}_i$ là độc lập tuyến tính nên $\mathcal{B}$ là độc lập tuyến tính.

Mặt khác:

$$|\mathcal{B}|=\sum_{i=1}^{k}|\mathcal{B}_i|=\sum_{i=1}^{k}\dim\mathrm{Ker}(f-\lambda_i id_X)=\dim X.$$

Vậy $\mathcal{B}$ là một cơ sở của không gian vector X và ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở $\mathcal{B}$ là ma trận chéo, bởi vì các phần tử của $\mathcal{B}$ là các vector riêng của tự đồng cấu f:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{d_1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_k I_k \end{pmatrix}, \text{ trong đó } d_i=|\mathcal{B}_i|(1 \le i \le k).$$

Kết quả 6. Cho f là một tự đồng cấu của không gian vector X. Điều kiện cần và đủ để f chéo hóa được là đa thức đặc trưng P_f tách được trên $\mathbb{K}$ và với mỗi giá trị riêng λ của f ta đều có $\dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id_X)$ bằng cấp bội của λ.

Chứng minh. Với mỗi giá trị riêng λ của f, ta ký hiệu $d(\lambda)=\dim \operatorname{Ker}(f-\lambda id_X)$ và $s(\lambda)$ là số bội của λ trong đa thức đặc trưng P_f.

Giả sử tự đồng cấu f chéo hóa được.

Theo Kết quả 4 nên $d(\lambda)\le s(\lambda), \forall \lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$.

Theo Kết quả 5 ta có $n=\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} d(\lambda)$, trong đó $n=\dim X$.

Theo giả thiết bổ sung f chéo hóa được nên tồn tại một cơ sở $\mathcal{B}$ của không gian vector X và $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n\in\mathbb{K}$ sao cho ma trận A của tự đồng cấu f trong cơ sở $\mathcal{B}$ có dạng:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... \\ 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow P_f(\lambda)=\det(A-\lambda I_n)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda_i-\lambda), \forall\lambda\in\mathbb{K}.$$

Do đó, đa thức đặc trưng P_f tách được trên $\mathbb{K}$ và $n=\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)}\omega(\lambda)$. Kết hợp hệ thức $n=\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)}\omega(\lambda)$ với các đánh giá $d(\lambda)\le s(\lambda),\forall\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$, $n=\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)} d(\lambda)$ ta thu được $d(\lambda)=s(\lambda),\forall\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$.

Ngược lại, giả sử đa thức đặc trưng P_f tách được trên $\mathbb{K}$ và $d(\lambda)=s(\lambda),\forall\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)$. Do P_f tách được và theo Kết quả 2 ta biết rằng các nghiệm của P_f là các giá trị riêng của f nên $n=\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(f)}\omega(\lambda)$. Kết luận được suy ra từ Kết quả 5.

Sau cùng ta xem xét một trường hợp riêng đặc biệt của bài toán chéo hóa , đó là trường hợp tự đồng cấu f là một phép chiếu.

Kết quả 7. Giả sử tự đồng cấu $f: X\to X$ có tính chất $f^2=f$. Khi đó f chéo hóa được.

Chứng minh. Đặt $U=\mathrm{Im}f$ và $W=\mathrm{Ker}f$. Ta sẽ chứng minh rằng $V=U\oplus W$ và $f|_U=id_U$.

Trước hết ta nhắc lại rằng U và W là các không gian con ổn định của f. Giả sử $v\in U\cap W$. Vì $v\in U$ nên $f(v)=0$. Mặt khác $v\in U=\mathrm{Im}\, f$ nên $v=f(u)$ với u nào đó thuộc X.

Ta có

$$f(v)=f(f(u))=f^2(u)=f(u)=v.$$

Kết hợp hai sự kiện trên ta suy ra $v=f(v)=0$. Vậy $U\cap W=\{0\}$.

Mỗi vector v thuộc X đều có thể phân tích thành

$$v=f(v)+(v-f(v)), \text{ trong đó } f(v)\in U, v-f(v)\in W.$$

Thật vậy: $f(v-f(v))=f(v)-f^2(v)=f(v)-f(v)=0$.

Tóm lại ta đã chứng minh được rằng $V=U\oplus W$.

Giả sử $(e_1,e_2,...,e_m)$ là một cơ sở của U, (ở đây ta quy ước $m=0$ nếu $U=\{0\}$). Trong phần chứng minh trên ta đã chỉ ra rằng $f|_U=id_U$. Vì thế các vector $e_1,e_2,...,e_m$ đều là vector riêng của f ứng với giá trị riêng bằng 1.

Giả sử $(e_{m+1},e_{m+2},...,e_n)$ là một cơ sở của W, (ở đây ta quy ước $n-m=0$ nếu $W=\{0\}$). Vì $W=\mathrm{Ker}f$ nên các vector $e_{m+1},e_{m+2},...,e_n$ đều là vector riêng của f ứng với giá trị riêng bằng 0.

Bởi vì $V=U\oplus W$, cho nên $(e_1,e_2,...,e_m,e_{m+1},e_{m+2},...,e_n)$ là một cơ sở của không gian X gồm toàn những vector rie6ng của f. Điều này có nghĩa là f chéo hóa được.

Tài liệu tham khảo.

[1]. Nguyễn Hữu Việt Hưng (2009), Đại số tuyến tính, NXB Đại học Quốc Gia.

[2]. Jean – Marie Monnier (1996), Giáo trình Toán – Tập 6 Đại số 2, NXB Giáo dục.