Điều kiện cần và đủ để tam giác hóa một tự đồng cấu

Trương Phước Nhân, 13/05/2018

Trong bài viết **"Bài toán chéo hóa"** ta đã bàn đến vấn đề tìm cho tự đồng cấu một cơ sở sao cho trong cơ sở đó ma trận của tự đồng cấu có dạng ma trận chéo hoặc gần với ma trận chéo và đồng thời chỉ ra một điều kiện đơn giản để nhận biết khi nào một tự đồng cấu là chéo hóa được và nghiên cứu sơ bộ cách để chéo hóa một tự đồng cấu. Nhưng như ta biết thì điều kiện để chéo hóa một tự đồng cấu khá ngặt nghèo nên không phải lúc nào ta cũng có thể tự do chéo hóa các tự đồng cấu. Trong bài viết này ta nghiên cứu một dạng đơn giản khác gần với ma trận chéo nhưng có điều kiện không quá ngặt đó là "tam giác hóa".

Tự đồng cấu $f: X \to X$ của không gian vector X được gọi là **tam giác hóa** được nếu ta có thể tìm được một cơ sở $\mathcal{B}$ của X sao cho ma trận của tự đồng cấu f trong cơ sở này là ma trận tam giác.

Sau đây ta sẽ trình bày điều kiện để chéo hóa một tự đồng cấu.

Kết quả. Giả sử f là một tự đồng cấu của không gian vector X. Khi đó các khẳng định sau là tương đương với nhau:

i) f tam giác hóa được.

ii) P_f tách được trên $\mathbb{K}$.

Chứng minh.

Đầu tiên như ta đã biết thì việc xem xét bài toán trên tự đồng cấu tương đương với xét ma trận cơ sở của nó nên ở đây để đơn giản hóa vấn đề ta sẽ quan tâm đến điều kiện tam giác hóa cho ma trận và ta phát biểu lại nội dung vấn đề trên cho các ma trận như sau.

Bài toán. Giả sử $A \in M_n(\mathbb{K})$. Khi đó các khẳng định sau là tương đương với nhau:

i) A tam giác hóa được.

ii) P_A tách được trên $\mathbb{K}$.

i) $\Rightarrow$ ii)

Giả sử A tam giác hóa được. Khi đó ta tìm được ma trận tam giác $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$ sao cho $A \sim T$.

Do đó, $P_A(\lambda) = P_T(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(t_{ii} - \lambda)$ nên P_A tách được trên $\mathbb{K}$.

ii) $\Rightarrow$ i)

Ta chứng minh khẳng định bằng quy nạp theo n.

Với $n = 1$, khẳng định là hiển nhiên.

Giả sử khẳng định của mệnh đề đã được kiểm chứng với mọi ma trận $A \in M_n(\mathbb{K})$ có đa thức đặc trưng P_A tách được trên $\mathbb{K}$. Xét ma trận $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$ sao cho P_A tách được trên $\mathbb{K}$.

Khi đó ma trận A có ít nhất một giá trị riêng λ_0. Nói cách khác ta tìm được $C \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_n(\mathbb{K})$ sao cho $A \sim \begin{pmatrix} \lambda_0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.

Suy ra, $P_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda_0 - \lambda & C \\ 0 & B - \lambda I_n \end{pmatrix} = (\lambda_0 - \lambda) P_B(\lambda)$.

Do P_A tách được trên $\mathbb{K}$ nên P_B tách được trên $\mathbb{K}$. Theo giả thiết quy nạp ta tìm được một ma trận khả nghịch $Q \in M_n(\mathbb{K})$ và một ma trận tam giác $T \in M_n(\mathbb{K})$ sao cho $B = QTQ^{-1}$.

Đặt $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. Khi đó R là ma trận khả nghịch với nghịch đảo $R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}$.

Ta sẽ chứng minh tồn tại ma trận $D \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ sao cho $\begin{pmatrix} \lambda_0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} \lambda_0 & D \\ 0 & T \end{pmatrix} R^{-1}$.

Thật vậy, bằng cách tính toán trực tiếp ta nhận thấy

$$R\begin{pmatrix} \lambda_0 & D \\ 0 & T \end{pmatrix} R^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 & D \\ 0 & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_0 & DQ^{-1} \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Bằng cách chọn $DQ^{-1} = C \Leftrightarrow D = CQ$ để có được $\begin{pmatrix} \lambda_0 & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = R\begin{pmatrix} \lambda_0 & D \\ 0 & T \end{pmatrix} R^{-1}$.

Điều mà ta vừa chứng minh chứng tỏ rằng ma trận A tam giác hóa được.

Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra khẳng định ii) $\Rightarrow$ i) là đúng.

Sau cùng, ta sẽ giải thích cụ thể hơn cách liên hệ kết quả vừa trình bày với kết luận gốc của bài toán mà ta đang xem xét như sau.

$$f \text{ tam giác hóa} \Leftrightarrow A \text{ tam giác hóa} \Leftrightarrow P_A \text{ tách được} \Leftrightarrow P_f \text{ tách được},$$

trong đó A là ma trận biểu diễn của tự đồng cấu f đối với một cơ sở $\mathcal{B}$ nào đó của không gian vector X.

Tài liệu tham khảo.

Jean – Marie Monnier (1996), Giáo trình Toán – Tập 6 Đại số 2, NXB Giáo dục