

LỜI GIẢI VÀ BÌNH LUẬN ĐỀ THI IMO 2018

Trần Nam Dũng – Võ Quốc Bá Cẩn – Lê Phúc Lữ

Nguyễn Văn Linh – Nguyễn Lê Phước

1. Vài nét về kỳ thi IMO 2018

Kỳ thi Olympic Toán học Quốc tế (IMO) lần thứ 59 được tổ chức ở thành phố Cluj-Napoca, Romania với sự tham gia của các đội đến từ 114 nước, mỗi đội được tham gia với tối đa 6 học sinh. Tham dự kỳ thi lần này, đội tuyển Việt Nam gồm các bạn:

1. **Trần Việt Hoàng**, lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.
2. **Trương Mạnh Tuấn**, lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.
3. **Nguyễn Quang Bin**, lớp 12 Toán 1, trường THPT chuyên KHTN, ĐHQG Hà Nội.
4. **Đỗ Hoàng Việt**, lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp.
5. **Phan Minh Đức**, lớp 11 Toán, trường THPT chuyên Hà Nội-Amsterdam, Hà Nội.
6. **Trịnh Văn Hoàn**, lớp 12 Toán, trường THPT chuyên Trần Phú, Hải Phòng.



Đội tuyển Việt Nam tham dự IMO 2018 (từ trái sang): thầy *Lê Bá Khánh Trình*, *Đỗ Hoàng Việt*, *Nguyễn Quang Bin*, *Trịnh Văn Hoàn*, *Trần Việt Hoàng*, *Trương Mạnh Tuấn*, *Phan Minh Đức*.

Các thầy tham gia dẫn đoàn là thầy **Lê Anh Vinh** (Viện Khoa Học Giáo Dục Việt Nam, Bộ Giáo Dục Đào Tạo – Trưởng đoàn), thầy **Lê Bá Khánh Trình** (ĐH KHTN, ĐHQG TP HCM – Phó đoàn), thầy **Vũ Thế Khôi** (Viện Toán học – Quan sát viên A) cùng nhiều thầy giáo đến từ các đơn vị liên quan.

Các thí sinh khi tham dự kỳ thi phải trải qua buổi thi (diễn ra vào các ngày 09/07/2018 và 10/07/2018). Mỗi buổi thi, thí sinh phải làm một đề thi gồm có ba bài toán, mỗi bài toán thuộc một trong các lĩnh vực: Đại số, Số học, Tổ hợp, Hình học. Ba bài toán được chọn vào đề thi ở mỗi ngày phải đảm bảo có 1 câu dễ, 1 câu trung bình và 1 câu khó. Độ khó của các bài toán được xếp tăng dần theo thứ tự. Điểm tối đa cho mỗi bài toán là 7 điểm. Thời gian làm bài cho mỗi bài thi là 4 giờ 30 phút. Cấu trúc đề thi của năm nay như sau:

- **Ngày thi thứ nhất:** Hình học (bài 1), Đại số (bài 2), Số học (bài 3).
- **Ngày thi thứ hai:** Tổ hợp (bài 4), Số học (bài 5), Hình học (bài 6).

Kết thúc kỳ thi, ban tổ chức quyết định trao huy chương Vàng cho các thí sinh đạt từ 31 điểm đến 42 điểm, huy chương Bạc cho các thí sinh đạt từ 25 điểm đến 30 điểm, huy chương Đồng cho các thí sinh đạt từ 16 điểm đến 24 điểm. Ngoài ra, ban tổ chức cũng trao tặng bằng khen danh dự cho các thí sinh không đạt huy chương nhưng giải trọn vẹn một bài toán nào đó trong hai ngày thi.

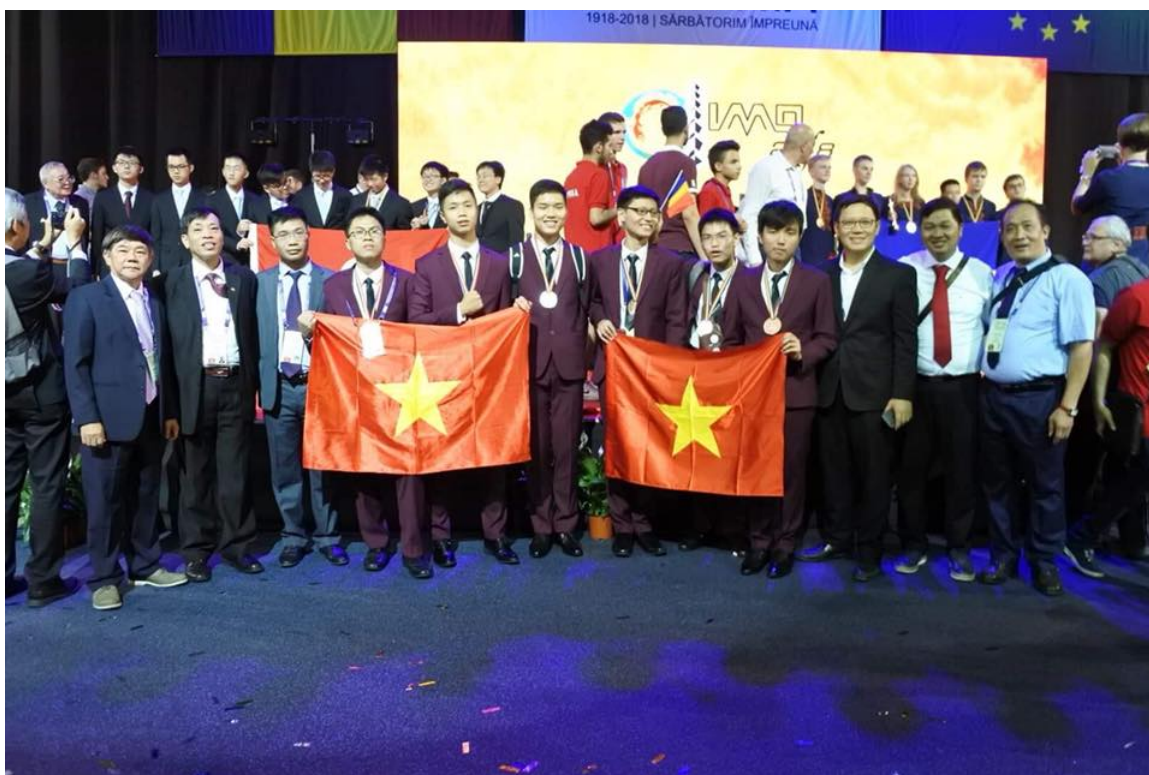
Có hai thí sinh đạt điểm tuyệt đối của kỳ thi là Agnijo Banerjee (Vương quốc Anh) và James Lin (Mỹ). Kết quả xếp hạng không chính thức, đội Mỹ là đội dẫn đầu với tổng số điểm 212 (5 huy chương Vàng, 1 huy chương Bạc), tiếp theo trong top 10 là các đội Nga, Trung Quốc, Ukraine, Thái Lan, Đài Loan, Hàn Quốc, Singapore, Ba Lan và Indonesia. Đội Việt Nam với 148 điểm (1 huy chương Vàng, 2 huy chương Bạc, 3 huy chương Đồng) xếp thứ 20.



Hai thí sinh đạt điểm tuyệt đối của kỳ thi (từ trái sang): James Lin, Agnijo Banerjee.

Thành tích cụ thể của các thành viên đội tuyển Việt Nam như sau:

1. **Trần Việt Hoàng:** 19 điểm, huy chương Đồng.
2. **Trương Mạnh Tuấn:** 22 điểm, huy chương Đồng.
3. **Nguyễn Quang Bin:** 35 điểm, huy chương Vàng.
4. **Đỗ Hoàng Việt:** 17 điểm, huy chương Đồng.
5. **Phan Minh Đức:** 29 điểm, huy chương Bạc.
6. **Trịnh Văn Hoàn:** 26 điểm, huy chương Bạc.



Đội tuyển Việt Nam chụp ảnh kỷ niệm tại lễ bế mạc IMO 2018 (thứ tư, từ trái sang): *Đỗ Hoàng Việt, Trần Việt Hoàng, Trịnh Văn Hoàn, Nguyễn Quang Bin, Phan Minh Đức, Trương Mạnh Tuấn, thầy Lê Anh Vinh* và các thầy giáo đi cùng đoàn.

Một điều đặc biệt là, ngoài đội tuyển Việt Nam thì vẫn còn người Việt khác tham gia kỳ thi lần này, đó là em Ngô Ngọc Thái Sơn (thuộc đội tuyển Ukraine). Em Sơn đạt huy chương Vàng với 34 điểm, cũng là điểm số cao nhất của đội Ukraine ở kỳ thi lần này. Ngoài ra, em Sơn từng tham dự hai kỳ IMO trước (với kết quả lần lượt là huy chương Đồng và huy chương Bạc) và giành huy chương Vàng kỳ thi Romanian Masters of Mathematics đầu năm nay với số điểm cao nhất kỳ thi.

Rất đáng tự hào trí tuệ Việt Nam. Người Việt ở đâu cũng có những hoạt động tích cực, đóng góp cho nước sở tại, làm tốt đẹp hình ảnh người Việt Nam và một phần đóng góp cho quê hương đất nước. Bên cạnh Ngô Ngọc Thái Sơn, có nhiều học sinh Việt Nam đã tham gia các đội tuyển các nước dự thi toán quốc tế, gần đây nhất có Trần Bạch Hải dự thi dưới màu cờ Romania, Nguyễn Chí Dũng dự thi dưới màu cờ Bulgaria. GS Nguyễn Hùng Sơn, HCB IMO 1986 là thành viên cốt cán của Ban Huấn luyện đội tuyển Ba Lan (năm nay Ba Lan xếp thứ 9). Nhiều thầy giáo Việt Nam cũng đã tham gia huấn luyện cho các đội tuyển Saudi Arabia, Pakistan.

2. Đề thi

2.1. Ngày thi thứ nhất (09/07/2018)

Bài 1. Cho Γ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Các điểm D và E lần lượt nằm trong các đoạn thẳng AB và AC sao cho $AD = AE$. Các đường trung trực của BD và CE cắt các cung nhỏ AB và AC của Γ tại các điểm F và G tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng DE và FG song song.

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ thỏa mãn $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ và

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Bài 3. *Tam giác phản-Pascal* là một bảng tam giác đều chứa các số sao cho, ngoại trừ các số ở hàng dưới cùng, mỗi số là giá trị tuyệt đối của hiệu hai số ở ngay dưới nó. Ví dụ, bảng số dưới đây là một tam giác phản-Pascal với bốn hàng và chứa tất cả các số nguyên từ 1 đến 10.

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & & \\ & 2 & & 6 & \\ & 5 & 7 & & 1 \\ 8 & 3 & 10 & & 9 \end{array}$$

Hỏi tồn tại hay không một tam giác phản-Pascal với 2018 hàng và chứa tất cả các số từ 1 đến $1 + 2 + \dots + 2018$?

2.2. Ngày thi thứ hai (10/07/2018)

Bài 4. Một *vị trí* là một điểm (x, y) trên mặt phẳng sao cho x và y là các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 20.

Lúc đầu, tất cả 400 vị trí đều trống. Ánh và Bảo lần lượt đặt các viên đá với Ánh là người đi trước. Trong mỗi lượt đi của mình, Ánh đặt một viên đá màu đỏ vào một vị trí trống sao cho khoảng cách giữa hai vị trí bất kỳ được đặt đá màu đỏ sẽ khác $\sqrt{5}$. Trong mỗi lượt đi của mình, Bảo đặt một viên đá màu xanh vào một vị trí trống bất kỳ. (Vị trí được đặt viên đá màu xanh có thể ở bất kỳ khoảng cách nào đến các vị trí đã được đặt đá.) Hai bạn sẽ dừng lại khi một trong hai người không thể tiếp tục đặt được các viên đá.

Tìm giá trị lớn nhất của K sao cho Ánh luôn có thể đặt được ít nhất K viên đá mà không phụ thuộc vào cách đặt đá của Bảo.

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Giả sử rằng tồn tại số nguyên $N > 1$ sao cho với mọi $n \geq N$, số

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương M sao cho $a_m = a_{m+1}$ với mọi số nguyên $m \geq M$.

Bài 6. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Điểm X nằm bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\angle XAB = \angle XCD$ và $\angle XBC = \angle XDA$. Chứng minh rằng

$$\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ.$$

3. Lời giải và bình luận các bài toán

Bài 1. Cho Γ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Các điểm D và E lần lượt nằm trong các đoạn thẳng AB và AC sao cho $AD = AE$. Các đường trung trực của BD và CE cắt các cung nhỏ AB và AC của Γ tại các điểm F và G tương ứng. Chứng minh rằng các đường thẳng DE và FG song song.

Lời giải. Gọi (ω_1) , (ω_2) lần lượt là đường tròn tâm F , bán kính FB và đường tròn tâm G , bán kính GC . Giả sử P , R lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn (ω_1) với Γ và FD ; còn Q , S lần lượt là giao điểm thứ hai của đường tròn (ω_2) với Γ và GE . Ta thấy

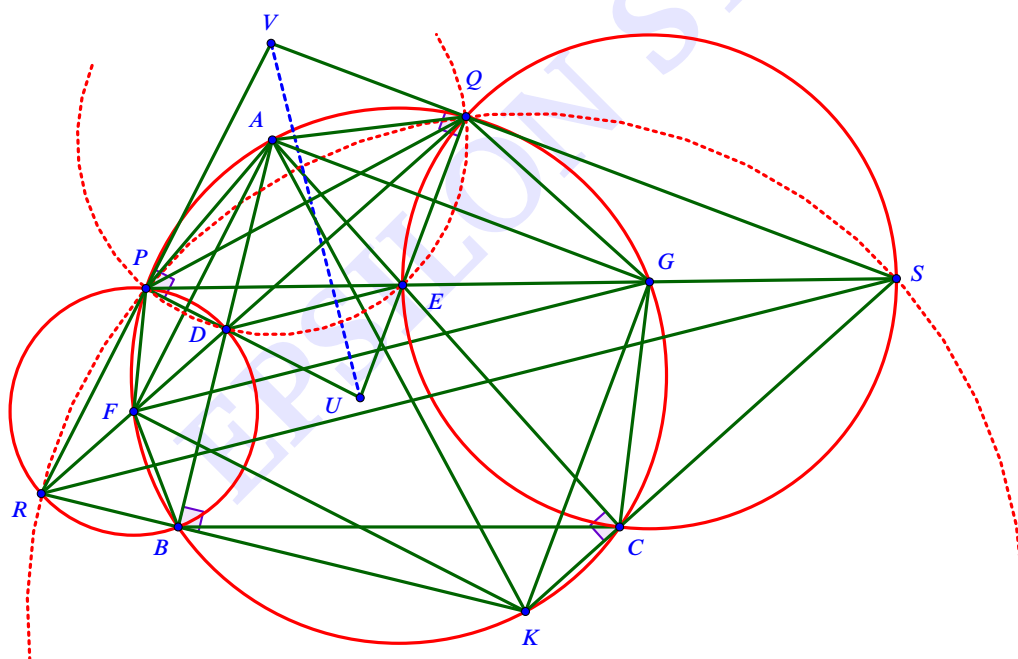
$$\angle ADF = 180^\circ - \angle BDF = 180^\circ - \angle DBF = \angle APF$$

nên hai tam giác ADF và APF bằng nhau, suy ra $AP = AD$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $AQ = AE$. Do đó, $AP = AD = AE = AQ$ nên tứ giác $PDEQ$ nội tiếp trong đường tròn tâm A . Gọi U là giao điểm của DP , QE thì

$$UD \cdot UP = UE \cdot UQ,$$

hay

$$\mathcal{P}_{U/(\omega_1)} = \mathcal{P}_{U/(\omega_2)}.$$



Gọi AK là đường kính của Γ thì $AF \perp FK$. Mặt khác, dễ thấy $AF \perp DP$ và $DP \perp PR$ nên $KF \perp PR$, mà $FP = FR$ nên FK là trung trực của PR , suy ra $KP = KR$.

Chứng minh tương tự, ta cũng có $KQ = KS$. Hơn nữa, vì $AP = AQ$ nên $KP = KQ$, kéo theo $KR = KP = KQ = KS$ hay tứ giác $RPQS$ nội tiếp trong đường tròn tâm K . Tiếp theo, gọi V là giao điểm của PR và QS thì ta có

$$VP \cdot VR = VQ \cdot VS,$$

hay

$$\mathcal{P}_{V/(\omega_1)} = \mathcal{P}_{V/(\omega_2)}.$$

Từ đó suy ra UV là trục đẳng phương của $(\omega_1), (\omega_2)$ nên $UV \perp FG$. Cuối cùng, do

$$\angle EUV = \angle VPQ = 90^\circ - \angle QPU = 90^\circ - \angle DEU$$

nên $UV \perp DE$. Vậy các đường thẳng DE và FG song song hoặc trùng nhau. $\square$

Bình luận. Bài toán có phát biểu đẹp, nhẹ nhàng và thú vị. Các điểm tương đối rời rạc trong đề bài rõ ràng đòi hỏi phải dựng thêm các điểm phụ để kết nối các giả thiết lại; và vì thế nên cách tiếp cận rất phong phú và đa dạng. Từ các cách rất “bình dân” như dùng biến đổi góc, lượng giác, dựng hình thang cân, hình bình hành, ... cho đến dùng phép biến hình, số phức, ...

Nếu giả thiết đổi lại vị trí của điểm F, G trên cung lớn AB, AC thì kết quả vẫn đúng. Chú ý rằng hai đường thẳng DE, FG trùng nhau chỉ khi $D \equiv B$ và $E \equiv C$.

Từ kết quả bài toán trên, ta thấy rằng khi D, E thay đổi thì trung điểm FG sẽ nằm trên đường thẳng qua tâm của Γ và song song với phân giác góc A của tam giác ABC .

Bài 2. Tìm tất cả các số nguyên $n \geq 3$ sao cho tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{n+2}$ thỏa mãn $a_{n+1} = a_1, a_{n+2} = a_2$ và

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Lời giải. Giả sử $n \geq 3$ là số nguyên thỏa mãn yêu cầu đề bài. Để tiện cho việc biến đổi, ta đặt $a_0 = a_n$ và $a_{n+3} = a_3$. Từ giả thiết, với mỗi $i = 1, 2, \dots, n$, ta có

$$a_{i-1} a_i a_{i+1} + a_{i-1} = a_{i-1} a_{i+2}, \quad a_i a_{i+1} a_{i+2} + a_{i+2} = a_{i+2}^2.$$

Từ đó suy ra

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i a_{i+3}$$

và

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+1} a_{i+2} + \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Kết hợp hai kết quả trên lại, ta thu được

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} = \sum_{i=1}^n a_i^2. \quad (1)$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, ta lại có

$$\sum_{i=1}^n a_i a_{i+3} \leq \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 + a_{i+3}^2}{2} = \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Do đó, theo (1), dấu đẳng thức trong các đánh giá phải xảy ra, hay ta có $a_i = a_{i+3}$ với mọi $i = 1, 2, \dots, n$. Bây giờ, ta xét các trường hợp sau:

- **Trường hợp 1: n chia 3 dư 1.** Theo kết quả trên, ta có

$$a_1 = a_4 = \dots = a_n = a_3 = a_6 = \dots = a_{n-1} = a_2 = a_5 = \dots = a_{n-2},$$

hay nói cách khác, tất cả các số a_i đều bằng nhau. Tuy nhiên, khi thay trở lại giả thiết thì không thỏa mãn (do phương trình $x^2 + 1 = x$ không có nghiệm thực).

- **Trường hợp 2: n chia 3 dư 2.** Xét tương tự như trên, ta cũng thu được điều mâu thuẫn.
- **Trường hợp 3: n chia hết cho 3.** Đặt $n = 3k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), bằng kiểm tra trực tiếp, ta thấy bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_{3k+2})$ với $a_{3\ell+1} = 2, a_{3\ell} = a_{3\ell-1} = -1$ thỏa mãn các yêu cầu của đề bài.

Vậy các số nguyên n thỏa mãn yêu cầu có dạng $n = 3k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Bình luận. Đây là một bài toán hay về hệ hoán vị vòng quanh. Ngoài cách giải trên, ta còn thể tiếp cận bài toán này bằng cách xét dấu các biến như sau: Để tiện cho các lý luận, ta mở rộng dãy $a_1, a_2, \dots, a_n$ thành dãy vô hạn $(a_m)_1^\infty$ theo quy tắc $a_m = a_r$ với $m \equiv r \pmod{n}$. Khi đó, với mọi k nguyên dương, ta cũng có

$$a_k a_{k+1} + 1 = a_{k+2}.$$

Bây giờ, ta sẽ chứng minh $a_k \neq 0$ với mọi k . Thật vậy, nếu tồn tại k sao cho $a_k = 0$, giả sử là $a_1 = 0$. Khi đó, ta có $a_2 = a_3 = 1$ và $a_4 = 2$, suy ra $a_5 > 0, a_6 > 0, \dots$ Tóm lại, a_i là số dương với mọi $i > 1$, mâu thuẫn do $a_{n+1} = a_1 = 0$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng trong dãy vô hạn (a_m) nói trên không thể có ba số hạng liên tiếp cùng âm. Thật vậy, nếu có ba số hạng liên tiếp cùng âm là a_k, a_{k+1}, a_{k+2} thì ta có $1 < a_k a_{k+1} + 1 = a_{k+2} < 0$, mâu thuẫn.

Nếu dãy (a_m) có chứa hai số hạng dương liên tiếp là a_k, a_{k+1} thì do cách xây dựng dãy và giả thiết bài toán, ta lần lượt thấy $a_m > 0$ rồi $a_m > 1$ với mọi m nguyên dương. Từ đó, dễ thấy $a_{m+1} < a_{m+1} a_m + 1 = a_{m+2}$ với mọi m nguyên dương, suy ra $a_2 < \dots < a_{n+2} = a_2$, mâu thuẫn. Do đó, dãy (a_m) không chứa hai số hạng dương liên tiếp nào.

Nếu trong dãy (a_m) tồn tại năm số hạng liên tiếp $a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, a_{k+3}, a_{k+4}$ có dấu lần lượt là $-, -, +, -, +$ thì ta có $a_{k+2} = a_k a_{k+1} + 1 > a_{k+2} a_{k+3} + 1 = a_{k+4}$. Từ đó suy ra $a_{k+5} = a_{k+3} a_{k+4} + 1 > a_{k+3} a_{k+2} + 1 = a_{k+4} > 0$, mâu thuẫn với kết quả trên.

Với các kết quả thu được, ta thấy dấu các số hạng của dãy (a_m) phải có một trong hai dạng

$$\dots, +, -, +, -, +, -, \dots$$

hoặc

$$\dots, +, -, -, +, -, -, \dots$$

Xét trường hợp thứ nhất, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a_{2m} > 0$ và $a_{2m-1} < 0$ với mọi m nguyên dương. Khi đó, ta có $a_{2m} = a_{2m-1} a_{2m-2} + 1 < 1$ với mọi $m > 1$, suy ra

$$a_{2m+1} = a_{2m} a_{2m-1} + 1 > a_{2m-1} + 1, \quad \forall m > 1.$$

Từ đó, ta có

$$a_{2m+1} = (a_{2m+1} - a_{2m-1}) + \dots + (a_5 - a_3) + a_3 > a_3 + m - 1, \quad \forall m > 1.$$

Do $a_{2m+1} < 0$ nên $a_3 + m - 1 < 0$ với mọi $m > 1$, mâu thuẫn.

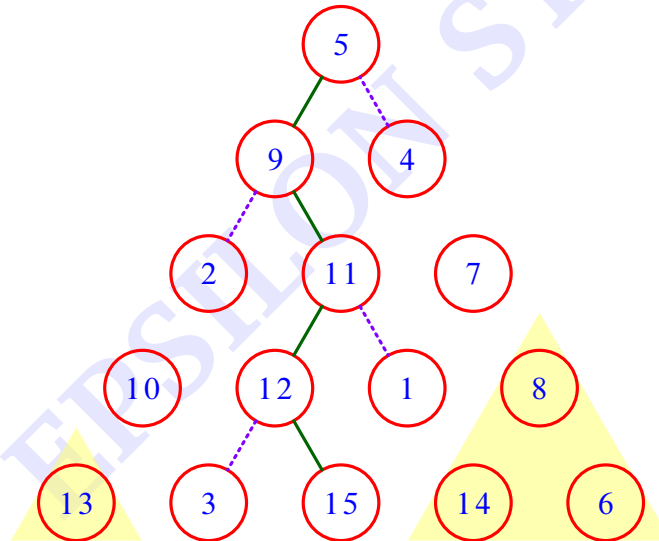
Xét trường hợp thứ hai. Rõ ràng để trường hợp này xảy ra, dễ thấy n phải chia hết cho 3. Khi đó, ta cũng dễ thấy bộ số $(a_1, a_2, \dots, a_n) = (2, -1, -1, \dots, 2, -1, -1)$ thỏa mãn yêu cầu. Điều này cho phép ta đi đến kết luận bài toán.

Bài 3. *Tam giác phản-Pascal* là một bảng tam giác đều chứa các số sao cho, ngoại trừ các số ở hàng dưới cùng, mỗi số là giá trị tuyệt đối của hiệu hai số ở ngay dưới nó. Ví dụ, bảng số dưới đây là một tam giác phản-Pascal với bốn hàng và chứa tất cả các số nguyên từ 1 đến 10.

$$\begin{array}{cccc}
 & & 4 & & \\
 & 2 & & 6 & \\
 & 5 & 7 & & 1 \\
 8 & 3 & 10 & & 9
 \end{array}$$

Hỏi tồn tại hay không một tam giác phản-Pascal với 2018 hàng và chứa tất cả các số từ 1 đến $1 + 2 + \dots + 2018$?

Lời giải. Câu trả lời là phủ định. Xét một tam giác phản-Pascal có $n \geq 3$ hàng, ta sẽ chứng minh rằng $n \leq 8$. Thật vậy, xuất phát từ đỉnh của bảng tam giác, ta sẽ kẻ hai nét: nét liền nối với số lớn và nét đứt nối với số nhỏ ở hàng dưới; tiếp theo, xuất phát từ số ứng với nét liền, kẻ hai nét tương tự đến hàng thứ ba và cứ như thế cho đến hàng dưới cùng của bảng.



Ta bổ sung thêm các định nghĩa sau:

- Các số được nối đến bằng nét liền (không tính số ở đỉnh) được gọi là *tốt*.
- Số tốt nằm ở hàng dưới cùng là số *tốt nhất*.
- Các số được nối đến bằng nét đứt (tính cả số ở đỉnh) được gọi là *xấu*.

Khi đó, ứng với mỗi tam giác phản-Pascal, ta thấy có tất cả $n - 1$ số tốt và n số xấu. Số tốt nhất sẽ không vượt quá số lớn nhất của bảng là $\frac{n(n+1)}{2}$. Nhưng theo cách định nghĩa thì số này cũng bằng tổng của tất cả các số xấu; tức là không nhỏ hơn

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Như thế thì đẳng thức phải xảy ra, tức là số tốt nhất là $\frac{n(n+1)}{2}$ và n số xấu là n số nguyên dương đầu tiên. Từ đó, ta thấy rằng:

- Các số xấu phân bố trên n hàng nên mỗi số xấu cũng chính là số nhỏ nhất của mỗi hàng.
- Số tốt nhất là lớn nhất của bảng nên mỗi số tốt cũng chính là số lớn nhất của mỗi hàng.

Xét hai bảng tam giác đều ứng với hai đỉnh còn lại của bảng và tách biệt với các số tốt – xấu đã xét ở trên (trong hình minh họa, bảng bên trái có 1 hàng và bảng bên phải có 2 hàng). Chú ý rằng trường hợp đường gấp khúc liền nét đi dọc theo cạnh của bảng tam giác ban đầu thì một trong hai bảng con là rỗng.

Mỗi bảng con cũng sẽ có các số tốt và xấu tương tự như trên; có tất cả $n - 2$ số xấu trên hai bảng và tổng này sẽ không nhỏ hơn

$$(n + 1) + (n + 2) + \cdots + 2n - 2 = \frac{3n^2 - 7n + 2}{2}.$$

Trong khi đó, số tốt nhất trên hai bảng con sẽ không vượt quá

$$\frac{n(n+1)}{2} - 1 + \frac{n(n+1)}{2} - 2 = n^2 + n - 3.$$

Do đó, ta phải có $\frac{3n^2 - 7n + 2}{2} \leq n^2 + n - 3$, hay $n \leq 8$. Bài toán kết thúc. $\square$

Bình luận. Chứng minh trên là của các nhà Toán học Herbert Taylor và Martin Gardner cách đây hơn 40 năm. Một sự trùng hợp là nó đã xuất hiện lại trong đề thi IMO năm nay. Bài toán đã được giải quyết hoàn toàn với các kết quả như sau:

- Lời giải chỉ tồn tại khi $1 \leq n \leq 5$, và để chỉ ra $n = 6, 7, 8$ không thỏa mãn cũng là các thử thách không đơn giản.
- Nếu không xét tính đối xứng thì ứng với $n = 1, 2, 3, 4, 5$, số tam giác phản-Pascal phân biệt lần lượt là 1, 2, 4, 4, 1.

Đặc điểm chung của các lời giải đều là ước lượng giá trị của số trên các hàng chứ hầu như không dùng đến yếu tố số học (khía cạnh phổ biến và tự nhiên khi tiếp cận bài toán kiểu này).

Vì thế câu hỏi có hay không trong đề bài cùng với việc lựa chọn hướng đi theo đại số hay số học chính là các trở ngại lớn. Bài toán sẽ trở nên “thân thiện” hơn rất nhiều khi phát biểu câu hỏi thành: *Chứng minh rằng không tồn tại tam giác phản-Pascal có số hàng lớn hơn hoặc bằng 9.*

Bài 4. Một vị trí là một điểm (x, y) trên mặt phẳng sao cho x và y là các số nguyên dương nhỏ hơn hoặc bằng 20.

Lúc đầu, tất cả 400 vị trí đều trống. Ánh và Bảo lần lượt đặt các viên đá với Ánh là người đi trước. Trong mỗi lượt đi của mình, Ánh đặt một viên đá màu đỏ vào một vị trí trống sao cho khoảng cách giữa hai vị trí bất kỳ được đặt đá màu đỏ sẽ khác $\sqrt{5}$. Trong mỗi lượt đi của mình, Bảo đặt một viên đá màu xanh vào một vị trí trống bất kỳ. (Vị trí được đặt viên đá màu xanh có thể ở bất kỳ khoảng cách nào đến các vị trí đã được đặt đá.) Hai bạn sẽ dừng lại khi một trong hai người không thể tiếp tục đặt được các viên đá.

Tìm giá trị lớn nhất của K sao cho Ánh luôn có thể đặt được ít nhất K viên đá mà không phụ thuộc vào cách đặt đá của Bảo.

Lời giải. Để tiện trình bày, ta phát biểu bài toán lại dưới dạng: Xét bàn cờ 20×20 ô. Ánh và Bình luân phiên nhau đặt các quân mã vào các ô còn trống sao cho không có hai con mã nào ăn nhau. Hai bạn sẽ chơi đến khi nào không có thể đặt thêm được quân mã nào nữa thì dừng. Hỏi Ánh có thể đảm bảo đặt được tối đa bao nhiêu quân mã, cho dù Bình chơi như thế nào?

Bây giờ, ta chia bàn cờ thành 25 block 4×4 và đánh số các ô của block bằng các chữ cái A, B, C, D như sau:

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

Các chữ cái này tạo thành các xích mà không có hai ô nào kề nhau trên xích có thể được chọn. Do đó nếu Ánh chọn một ô thì Bình chọn ô đối diện ô đó trên xích thì Ánh sẽ không chọn được thêm ô với chữ cái nữa. Do đó với mỗi chữ cái, Ánh có thể chọn được tối đa một ô với chữ cái đó. Suy ra ở mỗi block, Ánh có thể đặt được tối đa 4 con mã.

X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y
X		X		X		X		X		X		X		X		X		X	
	Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y		Y

Mặt khác, nếu đánh dấu các ô của bàn cờ bằng các chữ cái X, Y như hình vẽ ở trên thì các mã ở các ô này đôi một không ăn nhau. Vì có 200 ô được đánh dấu nên cho dù Bình đi thế nào, Ánh cũng có thể đặt được 100 quân mã. Với các lý luận ở trên ta kết luận $K_{\max} = 100$. $\square$

Bình luận. Đây là một bài toán nhẹ nhàng, khá phù hợp với vị trí bài số 4. Để giải bài này, không cần kiến thức và kỹ thuật cao siêu, rất phù hợp với các học sinh thông minh nhưng ít được trang bị kỹ thuật. Với những bài như thế này, tô màu hay đánh số các điểm (các ô) theo một quy luật nào đó là cách làm cơ bản và quen thuộc.

Cách phát biểu dưới dạng quân mã chỉ giúp trình bày lời giải dễ hơn và bài toán sinh động hơn chứ hoàn toàn không phải là gợi ý mang tính bản chất.

Ngoài cách chia thành các block 4×4 như trên, ta còn có thể sử dụng nhiều cách chia khác như 2×4 , 8×8 , ... Quy trình chung là chứng minh Ánh luôn đảm bảo đặt được $K_{\max}$ quân mã và chỉ ra cách đi của Bình để Ánh đặt được không quá $K_{\max}$ quân mã.

Bài 5. Cho $a_1, a_2, \dots$ là một dãy vô hạn các số nguyên dương. Giả sử rằng tồn tại số nguyên $N > 1$ sao cho với mọi $n \geq N$, số

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

là một số nguyên. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương M sao cho $a_m = a_{m+1}$ với mọi số nguyên $m \geq M$.

Lời giải. Đặt $s_n = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$. Theo giả thiết, ta có $s_n \in \mathbb{Z}$ với mọi số nguyên $n > N$. Mặt khác, ta thấy rằng

$$s_{n+1} - s_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Do đó, biểu thức $b_n = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}}$ là số nguyên với mọi số nguyên $n > N$.

Ta sẽ chứng minh rằng với mỗi số nguyên tố p thì $v_p(a_{n+1})$ sẽ nằm giữa $v_p(a_1)$ và $v_p(a_n)$, trong đó ký hiệu $v_p(x)$ là số mũ đúng của p trong phân tích thành thừa số nguyên tố của số nguyên $x \neq 0$.¹ Ta xét hai trường hợp:

• **Trường hợp 1: $v_p(a_1) \leq v_p(a_n)$.** Ta sẽ chứng minh

$$v_p(a_1) \leq v_p(a_{n+1}) \leq v_p(a_n).$$

Thật vậy:

- Giả sử $v_p(a_{n+1}) < v_p(a_1)$ thì $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > 0$, $v_p(a_{n+1} - a_n) = v_p(a_{n+1}) < v_p(a_1)$ nên trong b_n , phân số trước không nguyên nhưng phân số sau nguyên, dẫn đến $b_n \notin \mathbb{Z}$, mâu thuẫn.
- Giả sử $v_p(a_{n+1}) > v_p(a_n)$ thì tương tự, trong b_n , phân số trước nguyên nhưng phân số sau thì không, cũng dẫn đến điều mâu thuẫn.

• **Trường hợp 2: $v_p(a_1) > v_p(a_n)$.** Ta sẽ chứng minh

$$v_p(a_1) \geq v_p(a_{n+1}) \geq v_p(a_n).$$

¹Chú ý rằng $v_p(x + y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$ với mọi số nguyên x, y khác 0. Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $v_p(x) \neq v_p(y)$.

Thật vậy:

- Giả sử $v_p(a_{n+1}) < v_p(a_n)$ thì $v_p\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right) > 0$ và $v_p(a_{n+1} - a_n) = v_p(a_n) < v_p(a_1)$ nên trong b_n , phân số trước không nguyên nhưng phân số sau nguyên, dẫn đến $b_n \notin \mathbb{Z}$, mâu thuẫn.
- Giả sử $v_p(a_{n+1}) > v_p(a_1)$ thì tương tự, trong b_n , phân số trước nguyên nhưng phân số sau thì không, dẫn đến $b_n \notin \mathbb{Z}$, mâu thuẫn.

Khẳng định được chứng minh. Từ đó suy ra, với mỗi số nguyên tố p , ta sẽ có hai khả năng:

- Nếu $v_p(a_N) \geq v_p(a_1)$ thì ta phải có

$$v_p(a_N) \geq v_p(a_{N+1}) \geq v_p(a_{N+2}) \geq \cdots \geq v_p(a_1).$$

Dãy $v_p(a_n)$ giảm và nhận hữu hạn giá trị giữa $[v_p(a_1), v_p(a_N)]$ nên phải có lúc nó không đổi.

- Nếu $v_p(a_N) < v_p(a_1)$ thì ta phải có

$$v_p(a_N) \leq v_p(a_{N+1}) \leq v_p(a_{N+2}) \leq \cdots \leq v_p(a_1).$$

Dãy $v_p(a_n)$ tăng và nhận hữu hạn giá trị giữa $[v_p(a_N), v_p(a_1)]$ nên cũng có lúc nó không đổi.

Vậy nên trong mọi trường hợp, dãy $v_p(a_n)$ sẽ không đổi khi $n \geq N_p$ là chỉ số đủ lớn. Chú ý rằng ta chỉ cần xét các số p là ước nguyên tố của a_N hoặc a_1 vì với các số nguyên tố khác thì $v_p(a_N) = v_p(a_1) = 0$ kéo theo $v_p(a_n) = 0$ với mọi $n \geq N$.

Ta xét chỉ số $m = \max\{N_p : p \mid a_1 a_N\}$ thì rõ ràng giá trị của dãy kể từ chỉ số m sẽ không đổi. Ta có điều phải chứng minh. $\square$

Bình luận. Bài toán đẹp và rất thú vị, nó điển hình cho các dạng Toán thường gặp trong số học: *Một biểu thức hữu tỷ nhận giá trị nguyên với vô hạn giá trị của biến thì phải có tính chất đặc biệt nào đó.*

Mấu chốt duy nhất của bài chính là nhận xét được với mọi số nguyên tố p thì dãy số mũ đúng của p trong dãy a_n đã cho sẽ tăng, bị chặn trên hoặc giảm, bị chặn dưới. Khi đã dự đoán được kết quả này thì việc chứng minh không hề khó.

Ngoài cách tiếp cận trên, ta cũng có thể thuận túy dùng các lập luận trên ước chung lớn nhất, bội chung nhỏ nhất với các nhận xét:

$$\gcd(a_1, a_n) \mid \gcd(a_1, a_{n+1})$$

và

$$\text{lcm}(a_1, a_{n+1}) \mid \text{lcm}(a_1, a_n)$$

với mọi số nguyên $n \geq N$.

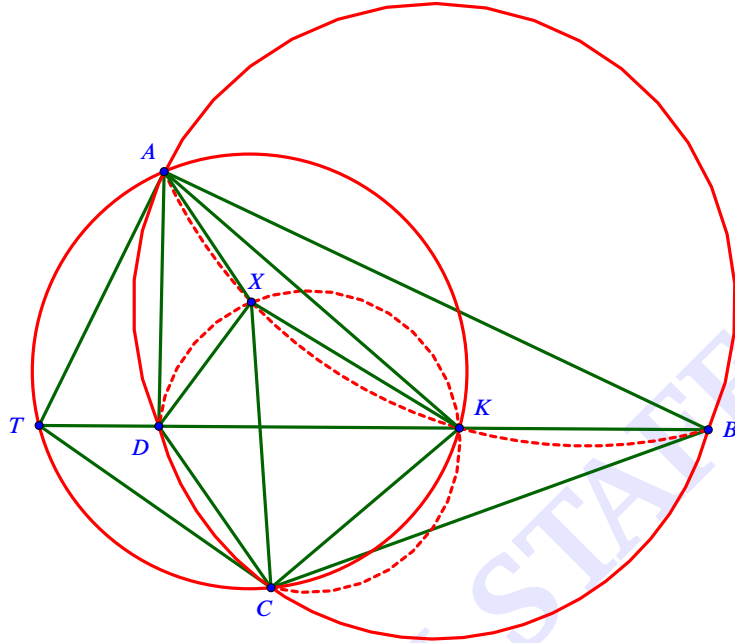
Bài 6. Cho tứ giác lồi $ABCD$ thỏa mãn $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Điểm X nằm bên trong tứ giác $ABCD$ sao cho $\angle XAB = \angle XCD$ và $\angle XBC = \angle XDA$. Chứng minh rằng

$$\angle BXA + \angle DXC = 180^\circ.$$

Lời giải 1. Gọi T là giao điểm tiếp tuyến tại A của (ABD) và BD . Ta có

$$\frac{TB}{TD} = \frac{AB^2}{AD^2} = \frac{CB^2}{CD^2}$$

nên CT là tiếp tuyến của (CBD) . Từ đó suy ra $TA^2 = TB \cdot TD = TC^2$, hay $TA = TC$.



Gọi K là giao điểm khác T của (TAC) và BD . Theo chứng minh trên, ta có $TA = TC$ nên $\angle TAC = \angle AKT$, mà $\angle KDA = \angle BAT$ nên $\angle KAD = \angle BAC$. Chứng minh tương tự, ta cũng có $\angle KCD = \angle BCA$.

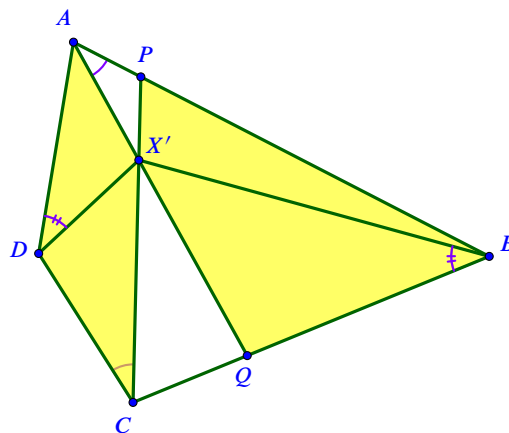
Gọi X' là giao điểm khác K của hai đường tròn (ABK) và (CDK) . Ta có

$$\angle X'CD = \angle X'KB = \angle X'AB. \quad (1)$$

Lại có

$$\begin{aligned} \angle X'BC &= \angle ABC - \angle ABX' = 180^\circ - \angle BAC - \angle BCA - (180^\circ - \angle AKX') \\ &= \angle AKC - \angle X'KC - \angle KAD - \angle KCD = \angle ADC - \angle X'DC \\ &= \angle X'DA. \end{aligned} \quad (2)$$

Bây giờ, chia tứ giác thành các miền bởi các đường $X'A$ và $X'C$ như hình vẽ bên dưới (trong đó, $X'C$ cắt AB tại P , $X'A$ cắt BC tại Q).



Ta sẽ chứng minh rằng, nếu X khác X' thì không thỏa mãn giả thiết bài toán. Thật vậy:

- Nếu X thuộc miền tứ giác $BPX'Q$ (có thể thuộc cạnh) thì $\angle XCD > \angle XAB$.
- Nếu X thuộc miền tứ giác $DAX'C$ thì $\angle XAB > \angle XCD$.
- Nếu X thuộc miền tam giác CQX' thì $\angle XBC < \angle XDA$.
- Nếu X thuộc miền tam giác APX' thì $\angle XBC > \angle XDA$.

Tóm lại, X trùng với X' . Từ đó, ta có

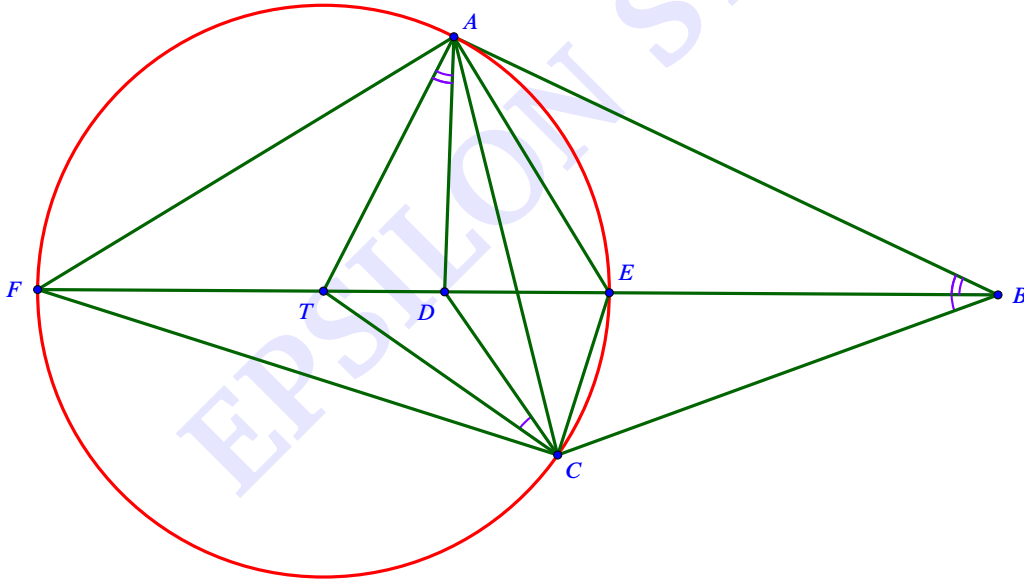
$$\angle DXC = \angle DKC = 180^\circ - \angle BKC = 180^\circ - \angle BKA = 180^\circ - \angle BXA. \quad \square$$

Lời giải 2. Trước hết, ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề. Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Khi đó

$$\angle DAC + \angle DBA = \angle DCA + \angle DBC.$$

Chứng minh. Gọi E, F lần lượt là chân phân giác trong và ngoài của góc BAD , và T là trung điểm của EF . Rõ ràng E, F cũng là chân phân giác trong và ngoài của góc BCD nên A, C cùng thuộc đường tròn Apollonius dựng trên BD .



Do $(EF, BD) = -1$ nên $TA^2 = TC^2 = TE^2 = TD \cdot TB$, suy ra $\triangle TBA \sim \triangle TAD$ và $\triangle TBC \sim \triangle TCD$. Do đó, ta có

$$\angle DAC + \angle DBA = \angle DAC + \angle DAT = \angle TAC.$$

Chứng minh tương tự, ta cũng có $\angle DCA + \angle DBC = \angle TCA$. Mà tam giác TAC cân tại T nên bổ đề được chứng minh. $\blacksquare$

Trở lại bài toán, ta sẽ chứng minh rằng điểm X của bài toán có thể được xác định bằng cách sau: Gọi K, L lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng AD và BC , AB và CD . Khi đó, X là giao điểm nằm trong tứ giác $ABCD$ của các đường tròn (ACL) và (BDK) .

Gọi E, F là chân phân giác trong và ngoài của góc BAD , và T là giao của AC và BD .

Tương tự, ta cũng có tứ giác $APMB$ nội tiếp nên P là giao điểm của các đường tròn (DMC) và (AMB) . Chứng minh tương tự trên, ta thu được P thuộc (DBK) hay $P \equiv X$.

Bây giờ, do A, C liên hợp đẳng giác trong tam giác DNB và A, N, C thẳng hàng nên NC là phân giác $\angle DNB$. Từ đó, ta có

$$\angle DXA + \angle CXB = \angle DNA + \angle CNB = \angle DNA + \angle DNC = 180^\circ. \quad \square$$

Bình luận. Bài toán tuy phát biểu nhẹ nhàng nhưng việc các góc nằm rời rạc, thiếu liên kết đã khiến nó trở nên rất khó tiếp cận, việc kẻ thêm đường phụ là tất yếu. Giả thiết tích cặp cạnh đối bằng nhau gợi ý ngay đến yếu tố Apollonius quen thuộc, và từ đó ta có thể đi theo hướng dùng biến đổi góc với các tứ giác nội tiếp hoặc dùng đẳng giác. Bài toán cũng có thể được giải quyết bằng phép nghịch đảo hoặc các biến đổi độ dài, lượng giác.

Theo thông tin từ tác giả bài toán, bài 6 này được phát triển từ điều kiện tồn tại điểm Brocard P trong tứ giác nội tiếp $ABCD$ sao cho $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCD = \angle PDA$ là tứ giác này phải điều hòa. Đây là một bài toán không mới và việc chứng minh cũng đòi hỏi phải dựng nhiều tam giác đồng dạng. Từ cách chứng minh đó, bài toán này đã được tạo ra.

Một tính chất nữa của điểm X là $XA \cdot XC + XB \cdot XD = AB \cdot CD = AD \cdot BC$.