QUÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Group Hình học phẳng

Nguyễn Duy Khương [*], **Nguyễn Hoàng Nam**[†], **Phan Quang Trí**[‡], **Trần Quân**, **Nguyễn Phúc Tăng**[§]

Quán hình học phẳng - Nơi hội tụ các thành viên có chung niềm đam mê hình học phẳng thuần tuý.

Tóm tắt : Chuyên mục: Quán hình học phẳng - nơi các bạn và thầy cô giáo đam mê hình học thoả sức phát huy sở trường của mình và thảo luận các bài toán hay. Mỗi tháng sẽ có 4 bài toán gồm các bài toán đề nghị của các admin Nguyễn Hoàng Nam, mình, Trí Phan Quang và 1 bài của bạn đọc gởi đến do chúng tôi chọn lọc. Kể từ tháng thứ 2 bạn nào được giải nhất của tháng trước có quyền đề nghị bài cho tháng sau(nếu muốn). Ngay từ lúc này các bạn có thể đóng góp bài cho chuyên mục. Các bài toán của tháng trước sẽ được giải và bình luận cũng như tiếp nhận phản hồi của bạn đọc trong một file pdf hàng tháng. Các bạn được giải nhất mỗi tháng sẽ được tặng một cuốn sách tuyển tập các bài toán trong chuyên mục sau mỗi năm. Cảm ơn các bạn đã ủng hộ nhóm. Chuyên mục có thể là một bước tiếp nối dành cho các bạn yêu hình học...

Tiêu chí: Chính xác nhanh và ngắn gọn đẹp đẽ nhất.

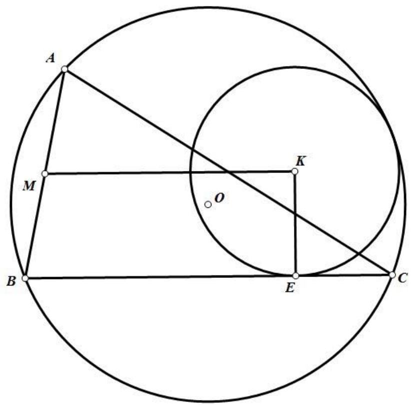
[*] *Chuyên Toán khoá 1518 THPT Chuyên Hà Nội - AMSTERDAM*
[†] *ĐH KHTN - ĐHQG TPHCM*
[‡] *ĐH Sài Gòn - TPHCM*
[§] *Hỗ trợ LaTeX*

1. Lời giải:

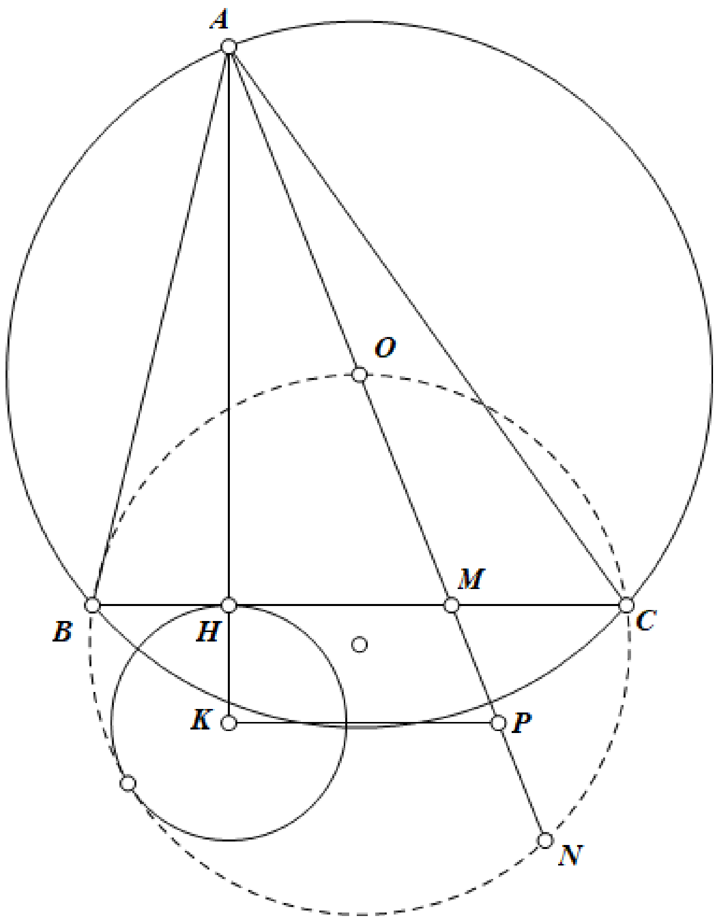
Bài 1

Bài toán đề nghị tháng 08/2018(Nguyễn Duy Khương)

Cho tam giác ABC có tiếp điểm đường tròn bàng tiếp góc A là E. K là hình chiếu của E lên đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Chứng minh rằng: $(K; EK)$ tiếp xúc (O).



Lời giải: Đổi mô hình coi vai trò mới của (O) là đường tròn (BOC) ta được bài toán trở thành bài toán sau:
m
Bài toán mới(Trần Quang Hùng)(Aops): Cho tam giác ABC nội tiếp (O). $AO \cap BC, (BOC) = M, N$ và P là trung điểm MN. Hạ $PK \perp AH (K \in AH)$ với H là chân đường cao hạ từ A xuống BC. Chứng minh rằng: (H, HK) tiếp xúc (BOC).



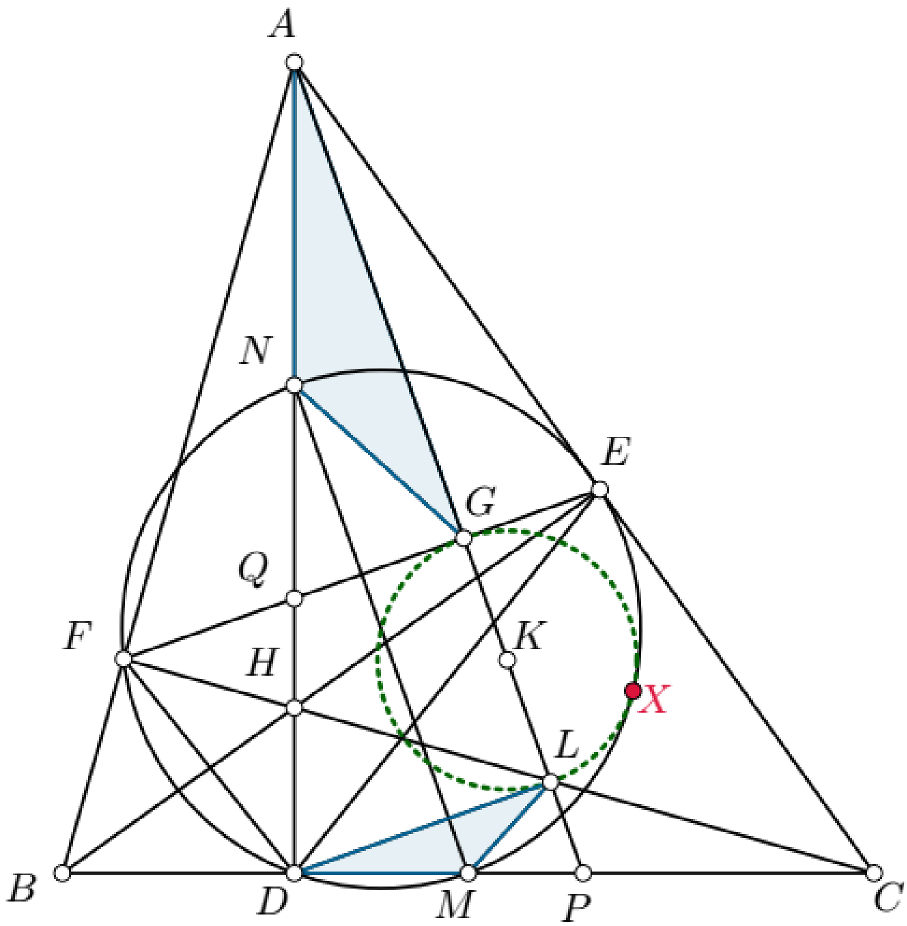
Chứng minh: Lấy AH, AO cắt lại (O) tại S, T. Gọi tiếp tuyến tại B, C của (O) cắt nhau tại S. Gọi Q là trung điểm BC. Gọi $OH \cap (BOC) = I, O$ ta có:

$OH.OI = OB^2$ suy ra: $OI = \dfrac{R^2}{OH}$ suy ra: $\dfrac{IH}{OI} = 1 - \dfrac{OH^2}{R^2} = 1 - \dfrac{OQ^2 + \dfrac{ST^2}{4}}{R^2} = 1 - (cosA)^2 - (cosACS)^2 = (sinA)^2 - (sin(B-C))^2 = (sinA - sin(B-C))(sinA + sin(B-C)) = sin2B.sin2C.$

Ta có: $\dfrac{OB}{2OJ} = cosA$ suy ra: $OJ = \dfrac{R^2}{2OQ}$. $KP \cap OS = R$. Ta có: $HKRQ$ là hình chữ nhật do đó: $HK = QR$. Ta có: $\dfrac{QR}{OQ} = \dfrac{MN}{2OM}$ suy ra: $QR = \dfrac{MN.OQ}{2OM}$ suy ra: $\dfrac{OJ}{HK} = \dfrac{R^2.OM}{OQ^2.MN}$. Theo bổ đề cát tuyến ta có: $\dfrac{OM}{MN} = \dfrac{OB}{BN}.\dfrac{OC}{CN} = \dfrac{cosA.cosA}{sin2C.sin2B}$ mà $\dfrac{R^2}{OQ^2} = \dfrac{1}{(cosA)^2}$. Vậy ta có: $\dfrac{HK}{OJ} = sin2B.sin2C.$

Tóm lại ta có: $\dfrac{HK}{OJ} = \dfrac{IH}{OI}$ do đó: I, K, J thẳng hàng dẫn đến: $(K; KH)$ tiếp xúc (BOC). Như vậy tức là ta có bài toán gốc cũng đúng. Ngay sau những ngày đầu tiên của chuyên mục, **bài toán 1** đúng như vị trí của nó đã được các bạn đón nhận nhiều nhất với rất nhiều lời giải khác hẳn lời giải gốc. Tư duy đổi mô hình cũng được bạn **Zeref** trên VMF tận dụng rất điêu luyện từ đó có 1 lời giải rất hay.

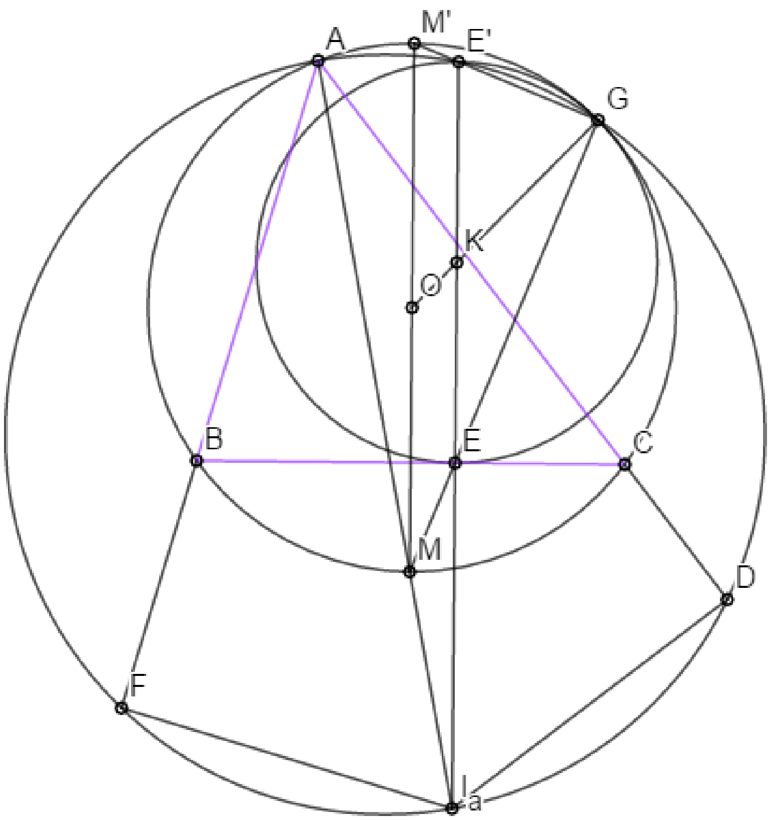
Lời giải 2(Zeref).



Gọi H là trực tâm, M, N là trung điểm BC, AH. $AG \cap BC = P$ và $AH \cap EF = Q$. Hình chiếu của D lên AP là L.
Dễ thấy: $MN \parallel AP$ và $L \in (K; KG)$. Ta sẽ CM $NG \perp ML$.
Dễ có $(AH, QD) = -1$ nên $NA^2 = NQ.ND \Rightarrow \frac{NA}{NQ} = \frac{ND}{NA} = \frac{MD}{MP}$
Mà $\Delta GAQ \sim LDP$ (chú ý tam các tam giác vuông). Do đó $\Delta AGN \sim DLM$.
Ta có: $\widehat{GNM} + \widehat{LMN} = \widehat{AGN} + \widehat{LMN} = \widehat{DLM} + \widehat{LMN} = 90^o$
Do đó $NG \perp ML$. Gọi $X = NG \cap ML$. $\widehat{NXD} = 90^o$ nên $X \in (DEF)$. Và $GL \parallel MN \Rightarrow X \in (K; KG)$
Vậy $X \in (K; KG), (DEF)$ và $GL \parallel MN$ nên $(K; KG)$ tiếp xúc (DEF).
Sử dụng mô hình gốc để chứng minh là 1 hướng đi khó nhưng đã có hai lời

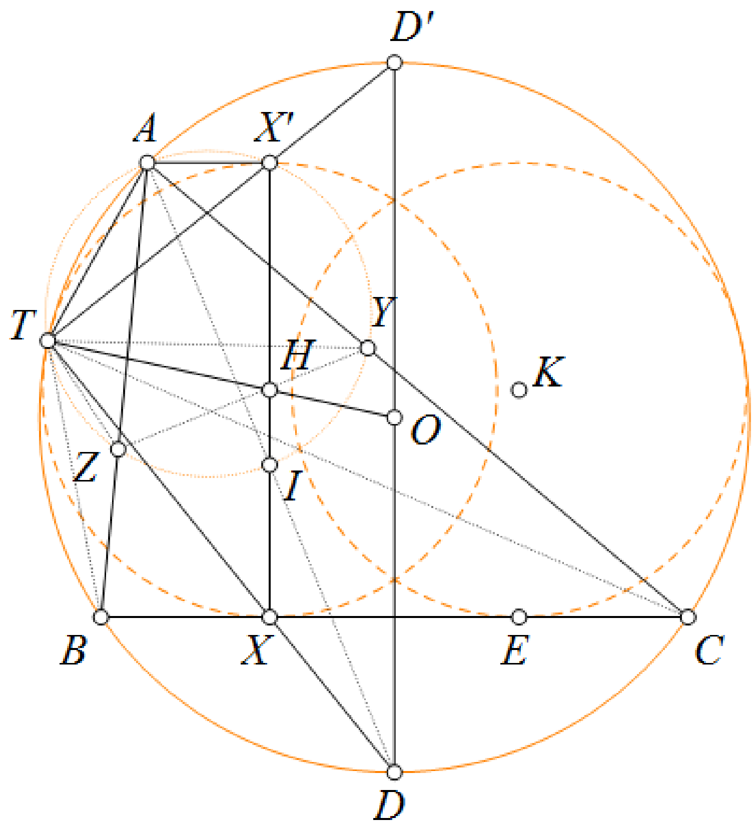
giải hay của các bạn **Nguyễn Duy Khang-TPHCM** và **Nguyễn Hà An-12 Toán THPT chuyên ĐHSP** cho hướng đi này. Ngoài ra còn có bạn **Trần Quốc Thịnh** có lời giải giống bạn Hà An(cách xử lí có dài hơn). Cách xử lí tiếp điểm của bạn An và Thịnh rất chuẩn xác. Tư duy điểm trùng và tỉ số của Khang cũng rất đặc sắc. Xin giới thiệu hai lời giải của bạn Khang và An.

Lời giải 3(Nguyễn Hà An).



Gọi I_a là tâm bàng tiếp, D, F là tiếp điểm của I_a với CA, AB. Gọi M, M' là trung điểm cung nhỏ, cung lớn BC, (AI) cắt (O) tại G. Dễ thấy $\triangle GBE \sim \triangle GCD => \dfrac{GB}{GC} = \dfrac{BF}{CD} = \dfrac{BE}{CE} => GE$ là phân giác BGC hay G, E, M thẳng hàng. Gọi $K' = OG$ cắt IaE thì do $KE//OM$ và OGM cân tại $O => KE = KG => (K', KE)$ tiếp xúc (O) tại G Lấy E' đối xứng E qua K' thì $\angle EGE' = 90^o = \angle MGM'$ mà M, E, G thẳng hàng nên G, E', M' thẳng hàng. Vì vậy $\angle AGE' = \angle AGM' = \angle AMM' = \angle AIaE' => A, E', G, Ia$ nội tiếp hay $AE'//BC$ Vì $d(K/AE') = d(K/BC)$ mà $AE'//BC$ nên K thuộc đg tb đỉnh A. Vậy K trùng K' hay (K, KE) tiếp xúc (O).

Lời giải 4(Nguyễn Duy Khang).



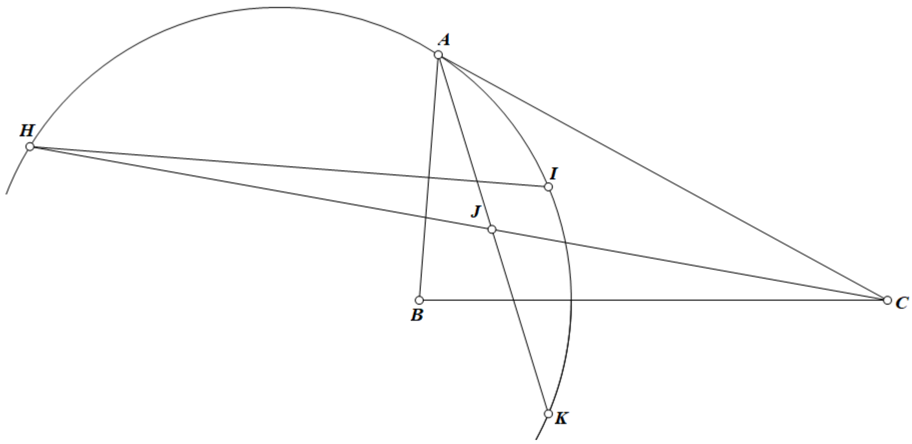
Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với X, Y, Z lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn trên BC, AC, AB. Lấy T là giao điểm thứ hai của đường tròn đường kính AI với (O). Trước hết ta chứng minh TX đi qua D là trung điểm cung nhỏ BC. Do $\angle TBZ = \angle TCY$ và $\angle TZB = 180^\circ - \angle TZA = 180^\circ - \angle TYA = \angle TYZ$ nên $\triangle TZB \sim \triangle TYC$, suy ra $\dfrac{TB}{TC} = \dfrac{ZB}{YC} = \dfrac{XB}{XC}$. Do X nằm trên đoạn BC nên TX là phân giác trong góc nội tiếp BTC, từ đó TX đi qua D. Gọi H là giao điểm của IX và OT, do $HX \parallel OD$ nên $\dfrac{TH}{HX} = \dfrac{TO}{OD} = 1$ hay $HT = HX$. Bây giờ ta cần chứng minh H nằm trên đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Lấy X' đối xứng X qua H và D' đối xứng D qua O, theo bổ đề hình thang thì T, X', D' thẳng hàng. Do DD' là đường kính (O) nên $\angle ATX' = \angle ADD' = \angle DIX = \angle AIX'$, suy ra X' cũng thuộc đường tròn đường kính AI. Từ đó $AX' \perp XX'$ và $AX' \parallel BC$, mà H là trung điểm XX' nên H phải nằm trên đường trung bình ứng với đỉnh A của tam giác ABC. Bây giờ, để ý rằng: Do $BX = CE$ nên (K, KE) chỉ là ảnh của (H, HX) qua phép đối xứng trục DD', mà (H, HX) tiếp xúc (O) tại T nên theo tính đối xứng thì

(K, KE) cũng tiếp xúc (O) (tại T' là ảnh của T của phép đối xứng trục DD')

Bài 2

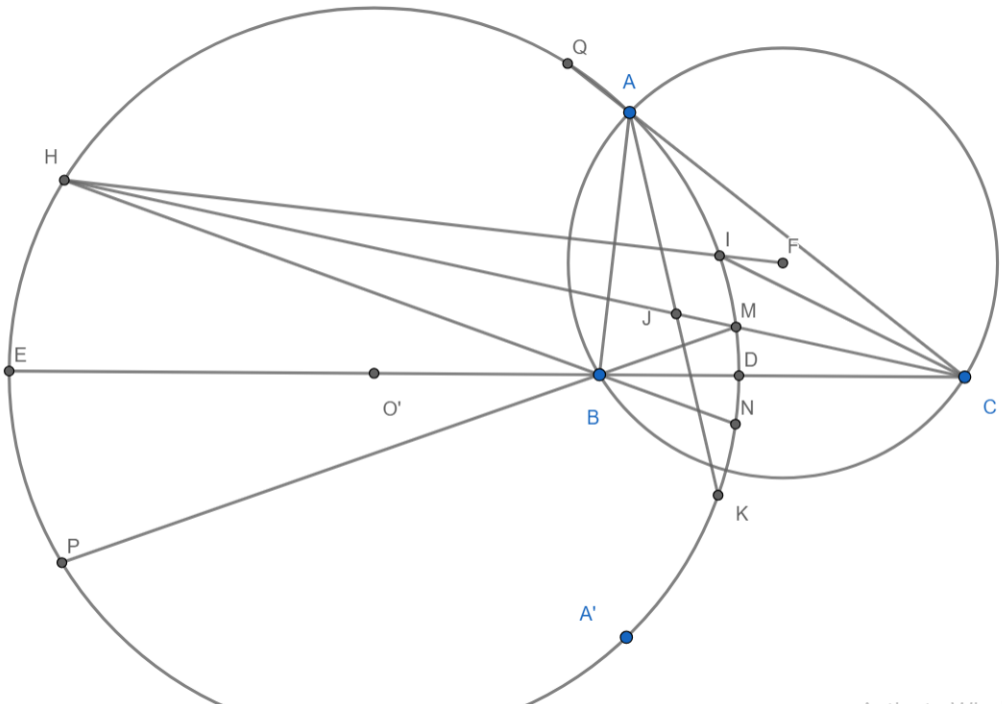
Bài toán đề nghị tháng 8/2018 (Nguyễn Hoàng Nam)

Cho tam giác ABC nội tiếp (O), trung trực AB cắt đường tròn A-Apollonius tại H, I (I gần O hơn H). Đối xứng của I qua BC là K. Giao của CH và AK là J. Chứng minh rằng JK là phân giác $\angle BJC$



Nhận xét: Tổng kết mình nhận được 3 lời giải chính thức từ các bạn và 1 lời giải chưa hoàn chỉnh từ 1 bạn trên facebook sẽ được đề cập ở phần bình luận sau. Cả 4 ý tưởng trên đều đúng và đều suy ra nhiều tính chất mà mình cũng chưa nghĩ ra bao giờ cả :) thôi không nói dài dòng mình xin giới thiệu lời giải mà mình cho là độc đáo nhất

Lời giải: Trần Quốc Thịnh



Gọi O' là tâm của đường tròn A-apollonius. Đường thẳng BC cắt (O') tại D, E (D nằm giữa B, C). Đối xứng của A qua BC là A'
Gọi giao của CH, HB, MB và CA với (O') lần lượt là M, N, P và Q. Ta có:

$$\angle BO'Q = 2\angle DEQ = 2\angle CAD = \angle BAC$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $ABO'Q$ nội tiếp. Suy ra:

$$\Rightarrow CB.CO' = CA.CQ = CM.CH =$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMHO'$ nội tiếp. Suy ra:

$$\Rightarrow \angle NBD = \angle O'BH = \angle O'MH = \angle DBM$$

$\Rightarrow$ N đối xứng với M qua BC. Suy ra P đối xứng với H qua BC. Theo tính chất đối xứng ta có:

$$\angle MHA' = \angle AHN = 2\angle AHI = 2\angle KHA'$$

$$\Rightarrow AI = IB = BK = KM(1)$$

$$\Rightarrow \angle PA'K = \angle IAH, MK = AI(2)$$

Từ (1), (2) $\Rightarrow \triangle KBM$ cân tại K suy ra $\angle KBM = \angle KMB = \frac{1}{2}PA'K = \frac{1}{2}IAH$ (3)

Tiếp tục ta có: $\angle KJM = \frac{1}{2}(MK + AH) = \frac{1}{2}(AI + AH) = \frac{1}{2}IAH$ (4)
Từ (3)(4) $\Rightarrow \angle KBM = \angle KJM$ vậy tứ giác $BKMJ$ nội tiếp.

$$\angle BJK = \angle KBM = \angle KMB = \angle KJM$$

Vậy JK là phân giác $\angle BJC$

Ta nhìn nhận khách quan thì lời giải này ngắn gọn và chỉ biến đổi góc đó là 2 điểm cộng rất lớn. Đi sâu hơn 1 chú ta chú ý tới cái suy ra thứ 2 là tứ giác $BHMO'$ nội tiếp. Ở cái suy ra này thì bạn Quân sử dụng hàng điểm như sau:

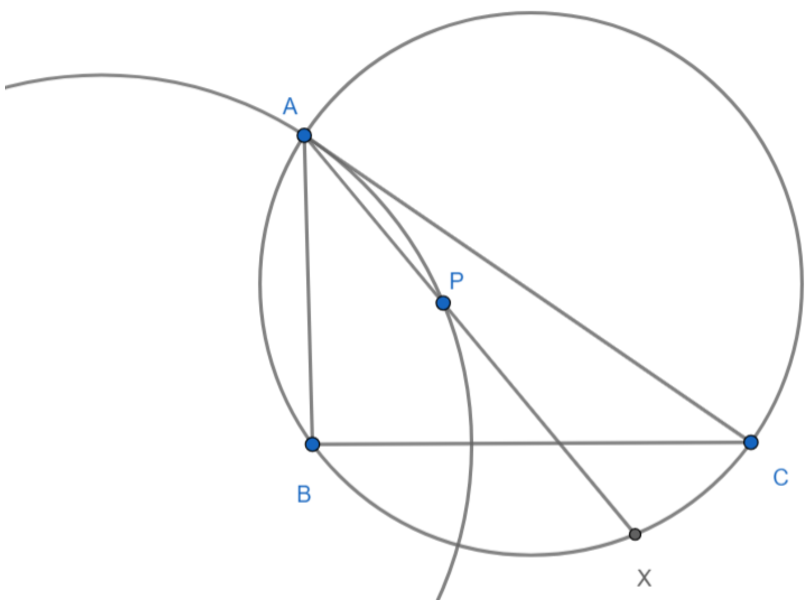
(Trich lời giải của bạn Quân và đổi tên điểm để phù hợp với lời giải của bạn Trần Quốc Thịnh) Do $(ED, BC) = -1$ theo Maclaurin ta có:

$$CM.CH = CD.CE = CB.CO'$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BMHO'$ nội tiếp.

Có 3 lời giải theo hướng chứng minh $KB = KA' = KM$ là của bạn Trần Quân, bạn Trần Quốc Thịnh và bạn Nguyễn Hà An. Còn phần biến đổi để dẫn đến cái bằng nhau này thì các bạn biến đổi hơi khác nhau nhưng nhìn chung đến đây là đã trọn vẹn bài toán rồi. Còn 1 bạn khác chỉ thể hiện ý tưởng nhưng khác 3 bạn trên và giống cách của mình. Có ý quan trọng mà mình muốn đề cập ở bài này là I, J là 2 điểm đẳng giác mà ta đã dễ thấy là AI, AJ đẳng giác rồi công việc của ta là chứng minh CH, CI đẳng giác nữa thôi, ban Đoàn Thành Đạt có ý tưởng chứng minh cái này rất hay theo hàng điểm như sau

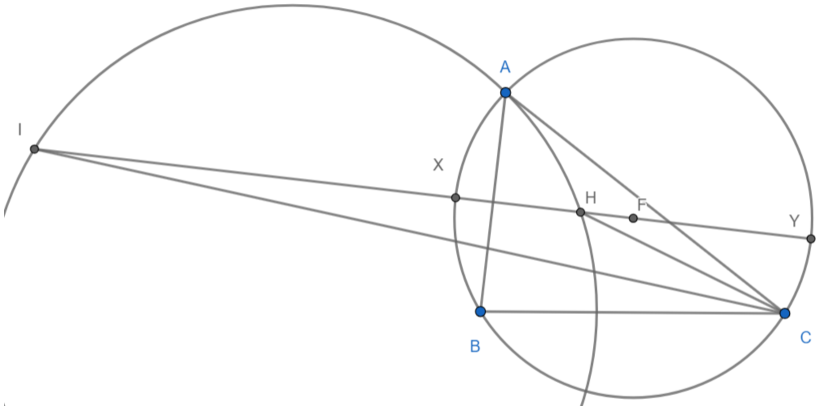
Bổ đề 1:



Cho tam giác ABC, điểm P nằm trên A-Apollonius khi và chỉ khi $\angle PAB + \angle PCB = \angle PAC + \angle PBC$

Lời giải: chiều đảo
Ta gọi giao của AP và (ABC) là X thì $\angle XBP = \angle PAB + \angle PCB = \angle PAC + \angle PBC = \angle XCP$. Suy ra $\frac{PB}{PC} = \frac{sin(\angle PXB)}{sin(\angle PXC)} = \frac{AB}{AC}$. Vậy P thuộc A-Apollonius
Chiều thuận
Ta gọi hình chiếu của P lên BC, AC, AB là X, Y, Z. Thì $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC} = \frac{sin(\angle ACB)}{sin(\angle ABC)}$ vậy ra $XY = XZ$. Biến đổi góc suy ra $\angle PAB + \angle PCB = \angle PAC + \angle PBC$.

Bổ đề 2:



Cho tam giác ABC, trung trực AB cắt A-Apollonius tại H, I. Thì CH, CI đẳng giác với nhau.
Lời giải: (Đựa theo ý tưởng của Đoàn Thành Đạt)

Gọi trung điểm cung nhỏ và cung lớn của AB lần lượt là X, Y. Thì do A-Apollonius và (ABC) trực giao với nhau nên $(HI, XY) = -1$ mà do HI đi qua tâm của (ABC) nên CX là phân giác $\angle ICB$. Vấy CH, CI đẳng giác.

Quay lại bài toán
Ta nhận ra ngay AI, AJ đẳng giác $\angle BAC$ kết hợp với bổ đề 2. Ta suy ra I, J là 2 điểm đẳng giác trong $\triangle ABC$, Sử dụng bổ đề 1 và biến đổi góc đựa vào tính đẳng giác ta suy ra ngay AJ là phân giác $\angle BJC$. Đự vào lời giải thứ 2 này ta

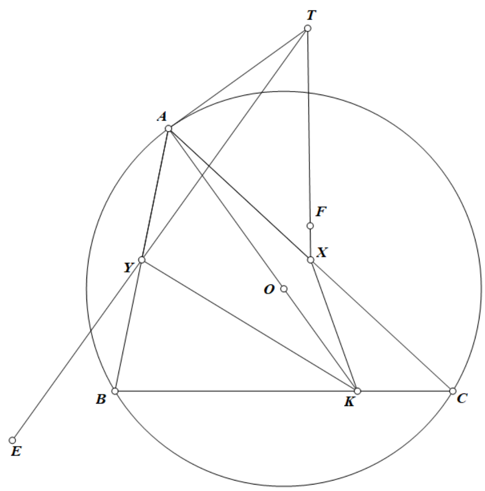
có thể tổng quát không hoàn toàn bài toán như sau:
(Tổng quát đựa trên tính chất của A-Apollonius Stophoids) Cho tam giác ABC

điểm X bất kì nằm trên A-Apollonius. Điểm đẳng giác của X trong $\triangle ABC$ là Y. Thì AY là phân giác $\angle BYC$.

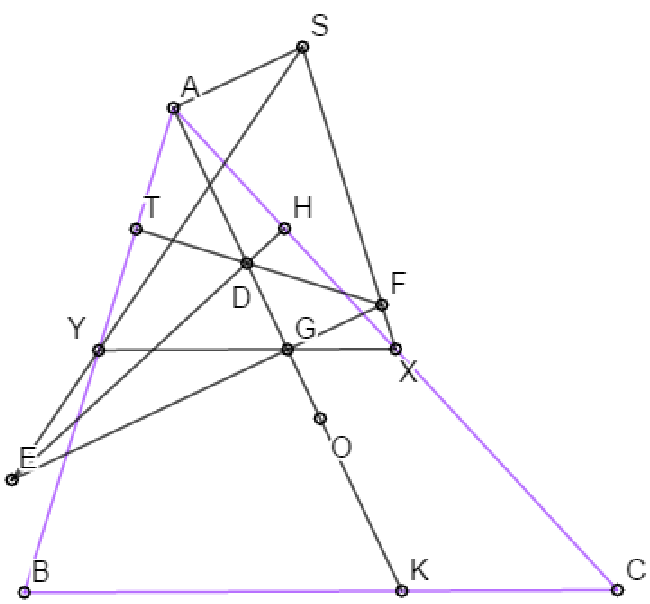
Bài 3

Bài toán đề nghị tháng 8/2018 (Phan Quang Trí)

Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O).Gọi X, Y lần lượt là trung điểm của CA, AB. AO cắt BC ở K. Gọi tâm của $(AXK), (AYK)$ lần lượt là E, F.Chứng minh rằng: YE và XF cắt nhau trên tiếp tuyến tại A của (O).



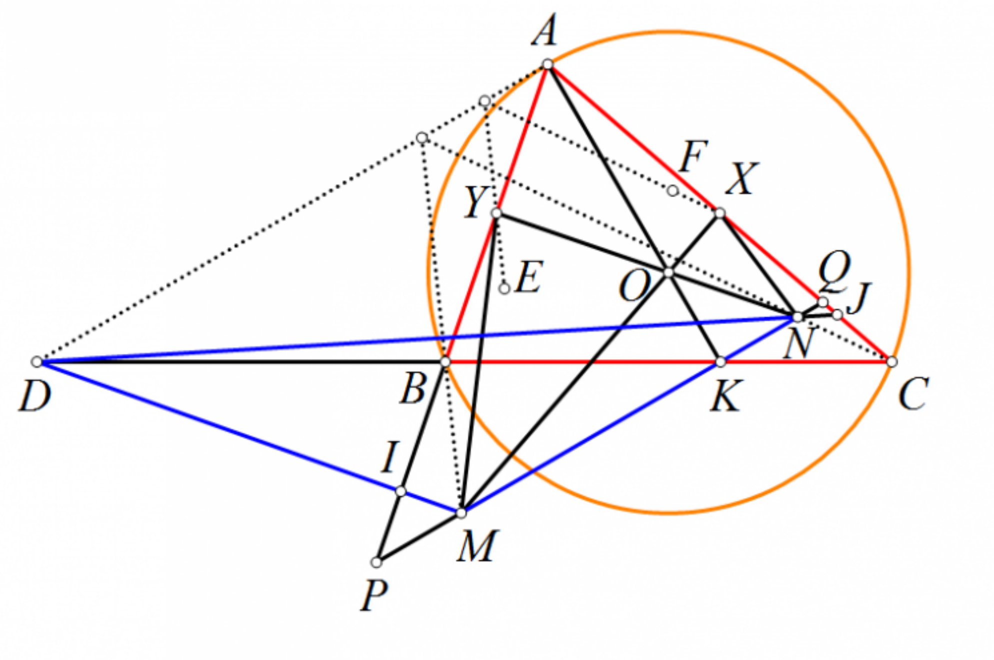
Lời giải 1(Nguyễn Hà An)



Gọi YE cắt XF tại S, A' là hình chiếu của S lên OA, SA' cắt XY tại L
Khi đó do $EF \perp AO$ nên $AS//EF$ và $A(FEGS) = \frac{GF}{GE}$

Ta có tâm ngoại tiếp AXY nằm trên AO (phép vị biến ABC thành AYX)
Nên TE, KF, AO đồng quy vì thế $\frac{GF}{GE} = \frac{tanGDE}{tanGDF} = \frac{tanAKH}{tanAHK} = \frac{tanB}{tanC}$
Vì $S(FEGA') = S(XYGL) = \frac{GX}{GY} : \frac{LX}{LY}$
Suy ra $\frac{LX}{LY} = \frac{GX}{GY} \cdot \frac{GE}{GF} = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{OX}{OY} \cdot \frac{AX}{OX} \cdot \frac{AY}{OY} = (\frac{AX}{AY})^2$
Vậy LA' tiếp xúc (O) hay $LA \perp AO$ nên $A \equiv A'$ (dpcm)

Lời giải 2(Nguyễn Duy Khang)



Kẻ đường kính AM của (AXK) và đường kính AN của (AYK). Ta sẽ chứng minh BM, CN cắt nhau trên tiếp tuyến tại A của (O)
Dễ dàng nhận thấy một số điều sau: M, O, X thẳng hàng, N, O, Y thẳng hàng, M, K, N thẳng hàng, tứ giác $MNXY$ nội tiếp, tứ giác $PQXY$ nội tiếp. Từ đó ta có $\angle MYP = \angle NXQ$

Giả sử tiếp tuyến tại A của (O) cắt BC tại D, theo định lý *Desargues* cho hai tam giác DMN và ABC: BM, CN, AD đồng quy khi và chỉ khi $I = DM \cap AB$, $K = MN \cap BC$, $J = DN \cap AC$ thẳng hàng.

Thật vậy, theo định lý *Menelaus* thì ta chỉ cần chứng minh

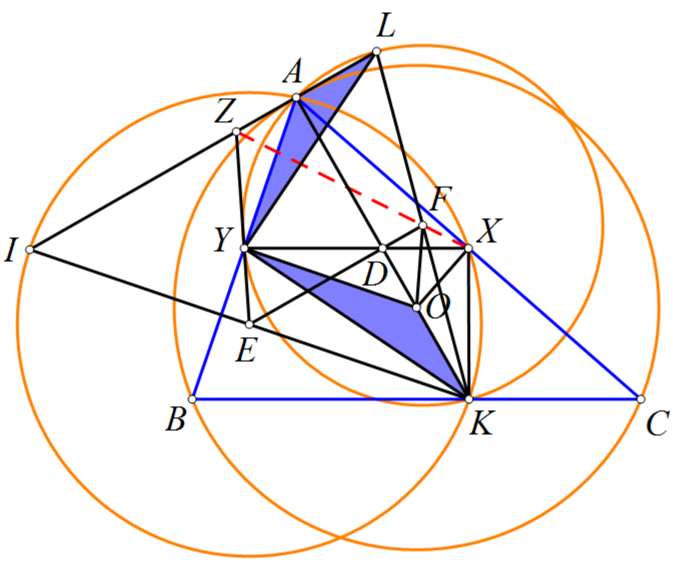
$$\frac{IM}{ID} \cdot \frac{JD}{JN} \cdot \frac{KN}{KM} = 1$$

Biến đổi vế trái ta có

$$\begin{aligned}
\frac{IM}{ID} \cdot \frac{JD}{JN} \cdot \frac{KN}{KM} &= \frac{MP}{DA} \cdot \frac{DA}{NQ} \cdot \frac{ON\cos\angle ONK}{OM\cos\angle OMK} \\
&= \frac{MP}{NQ} \cdot \frac{ON}{OM} \cdot \frac{\cos\angle ONK}{\cos\angle OMK} \\
&= \frac{MP}{NQ} \cdot \frac{NX}{MY} \cdot \frac{\sin\angle MPY}{\sin\angle NQX} \\
&= \frac{MP}{MY} \cdot \frac{NX}{NQ} \cdot \frac{\sin\angle MPY}{\sin\angle NQX} \\
&= \frac{\sin\angle MYP}{\sin\angle MPY} \cdot \frac{\sin\angle NQX}{\sin\angle NXQ} \cdot \frac{\sin\angle MPY}{\sin\angle NQX} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Suy ra đpcm. Tới đây xét phép vị tự tâm A tỉ số $\dfrac{1}{2}$ biến BM thành YE, biến CN thành XF, biến tiếp tuyến tại A của (O) thành chính nó. Do BM, CN, AD đồng quy nên YE, XF, AD cũng đồng quy.

Lời giải 3 (Nguyễn Duy Hiếu)



Kẻ các đường kính XI và XL của (E) và (F), suy ra IL là tiếp tuyến của (A). Gọi D là trung điểm AK thì XY và EF đều đi qua D. Gọi Z là giao của YE với IL.
Ta có

$$\frac{ZE}{ZY} = \frac{d(E, IL)}{d(Y, IL)} = \frac{\frac{1}{2}AK}{AY\sin\angle IAY} = \frac{AK}{AB\sin C} = \frac{CK}{AB\sin\angle KAC}$$

$$\frac{XY}{XD} = \frac{CB}{CK}$$

$$\implies \frac{ZE}{ZY}\cdot\frac{XY}{XD} = \frac{CB}{AB\sin\angle KAC} = \frac{\sin A}{\sin C\cos B}$$

Để ý $\triangle YAL \sim \triangle YOK$ (g-g) nên $\dfrac{AL}{OK} = \dfrac{YA}{YO} = \tan\angle AOY = \tan C$. Tương tự ta cũng có $\dfrac{AI}{OK} = \tan B$ nên

$$\frac{DF}{DE} = \frac{AL}{AI} = \frac{\tan C}{\tan B} = \frac{\cos B\sin C}{\sin B\cos C}$$

$$\implies \frac{FD}{FE} = \frac{\cos B\sin C}{\sin B\cos C + \cos B\sin C} = \frac{\cos B\sin C}{\sin(B+C)} = \frac{\cos B\sin C}{\sin A}$$

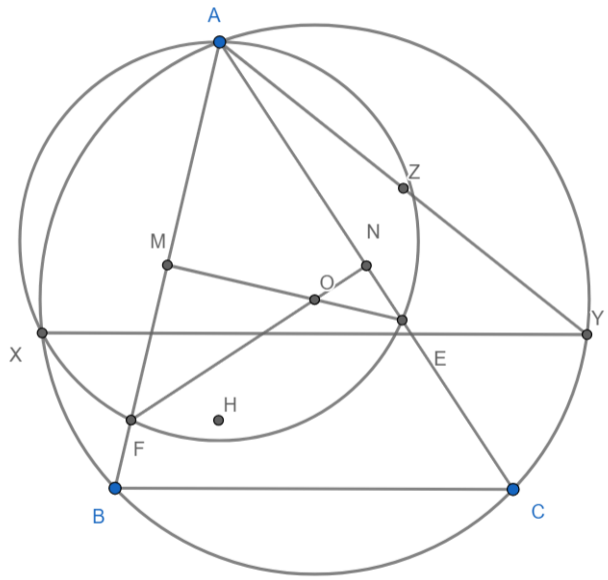
Từ đó ta có $\dfrac{ZE}{ZY}\cdot\dfrac{XY}{XD}\cdot\dfrac{FD}{FE} = 1$ hay Z, X, F thẳng hàng, suy ra XF cắt YE tại Z nằm trên IL là tiếp tuyến tại A của (O)

2. Đề bài:

Bài 1

Bài toán đề nghị tháng 9/2018 (Nguyễn Hoàng Nam)

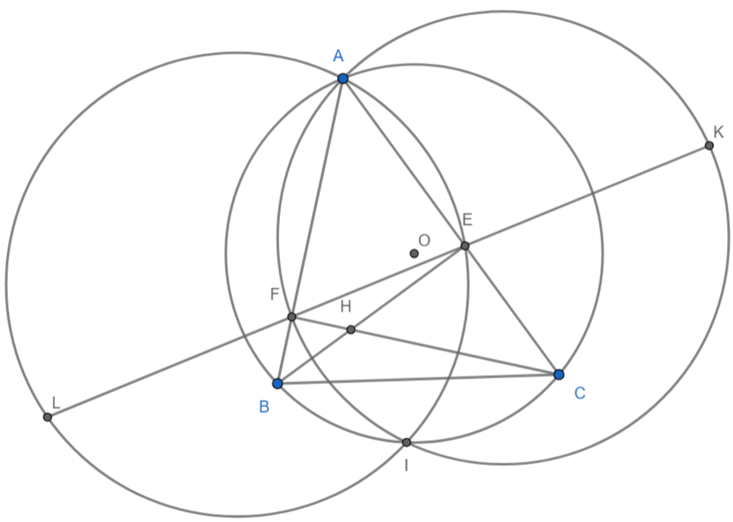
Cho tam giác ABC trung trực AB và AC cắt AC và AB lần lượt tại E và F. Giao của (AEF) và (ABC) là X. Đối xứng của X qua trung trực Bc là Y. Chứng minh rằng: đường thẳng Euler của $\triangle ABC$ chia đôi AY.



Bài 2

Bài toán đề nghị tháng 9/2018 (Nguyễn Duy Khương)

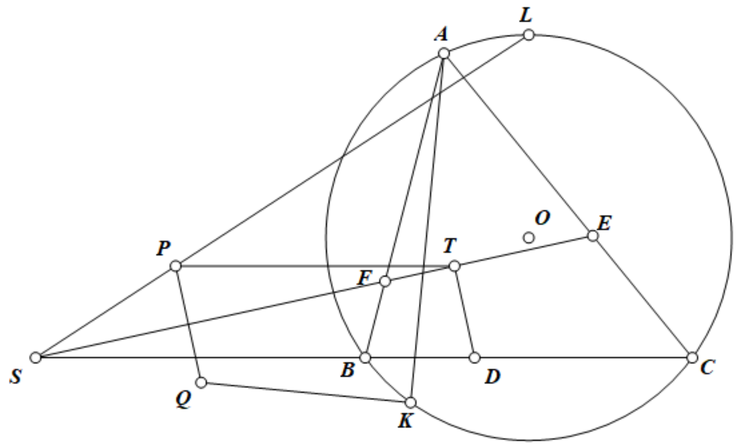
Cho tam giác ABC có các đường cao BE, CF và K, L thuộc EF sao cho: $CF = CK$ và $BL = BE$. $(ALE) \cap (AFK) = A, I$. Chứng minh rằng: $ABIC$ là tứ giác điều hoà.



Bài 3

Bài toán đề nghị tháng 9/2018 (Trần Quân)

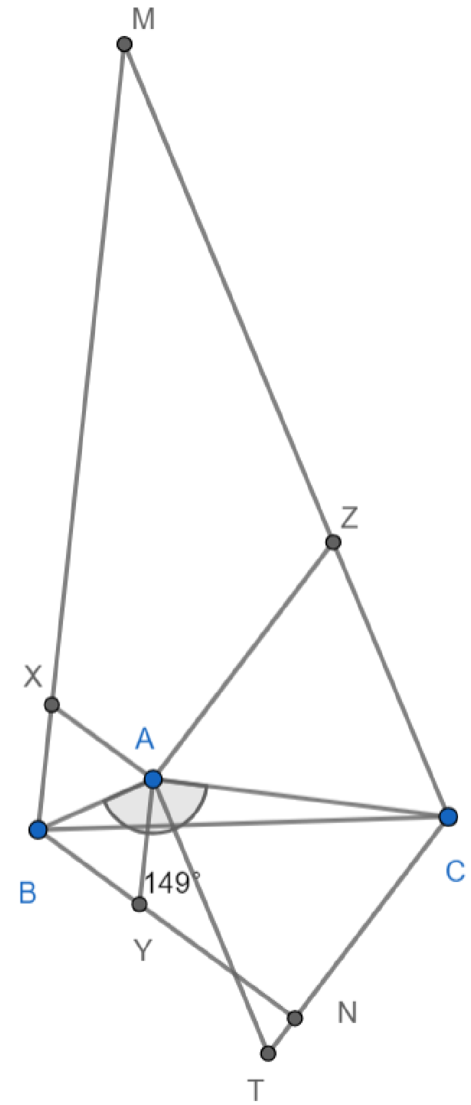
Cho tam giác nhọn, không đều $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn (O). Các điểm D, E, F lần lượt trên các cạnh BC, CA, AB sao cho $AE = AF$ và AD, BE, CF đồng quy. T trên EF sao cho $DP \perp EF$. K trên (O) sao cho KT là phân giác góc $\angle EKF$. EF cắt BC tại S. L là điểm chính giữa cung BAC của đường tròn (O). P trên LS sao cho $PT \parallel BC$. Q đối xứng với T qua EF. Chứng minh $QK \perp AK$.



Bài 4

Bài toán đề nghị tháng 9/2018 (Phan Quang Trí)

Cho tam giác ABC, điểm B, C cố định, A đi động sao cho $\angle BAC$ cố định và $\angle BAC > 140$. Dựng ngoài $\triangle ABC$ các tam giác đều $\triangle ABX$ và $\triangle CAZ$. Dựng trong $\triangle ABC$ các tam giác đều $\triangle ABY$ và $\triangle CAT$. Giao của BX, CZ là M. Giao của BY, CT là N. Chứng minh đường thẳng Euler của $\triangle ANM$ luôn tiếp xúc với 1 đường tròn cố định khi A di động.


M
Z
X
A
B
C
149°
Y
N
T