

Người giải : TRƯƠNG HUỖNH NHẬT VINH
Lớp 10 chuyên Quảng Ngãi

Tìm tất cả các cặp số nguyên không âm (m, n) thỏa mãn phương trình:

$$m^2 + (3 - 2^{n+1})m + 2(3^n - 2^n + 1) = 0.$$

Giải

Ta có $m^2 + (3 - 2^{n+1})m + 2(3^n - 2^n + 1) = 0$

- Ta xét các trường hợp của n
- +) $n=0, n=1, n=2$ không thỏa mãn
- +) $n=3 \Rightarrow m=5, m=8$
- +) $n=4$ không thỏa mãn
- +) $n=5 \Rightarrow m=8, m=53$

- Ta chứng minh với $n \geq 6$ phương trình không có nghiệm nguyên dương. Thật vậy

Đặt $t = m+1$, ta có

$$(t-1)^2 + (3 - 2^{n+1})(t-1) + 2(3^n - 2^n + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 + (1 - 2^{n+1})t + 2 \cdot 3^n = 0 \Leftrightarrow t(2^{n+1} - 1) - t^2 = 2 \cdot 3^n \quad (*)$$

$\Rightarrow t$ là ước của $2 \cdot 3^n$. Đặt $n = p + q$ với $0 \leq p, q \leq n \Rightarrow t = 2 \cdot 3^p \vee t = 3^p$

$$\text{Từ } (*), \text{ ta có } \begin{cases} 2 \cdot 3^q (2^{n+1} - 1) - (2 \cdot 3^q)^2 = 2 \cdot 3^n, t = 2 \cdot 3^q \\ 3^p (2^{n+1} - 1) - (3^p)^2 = 2 \cdot 3^n, t = 3^p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{n+1} - 1 = 3^p + 2 \cdot 3^q, t = 2 \cdot 3^q \\ 2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 3^q + 3^p, t = 3^p \end{cases}$$

Vậy cả hai trường hợp của t ta đều có

$$2^{n+1} - 1 = 3^p + 2 \cdot 3^q \quad (**) \text{ với } 0 \leq p, q \leq n; p + q = n \geq 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3^p < 2^{n+1} = 8^{\frac{n+1}{3}} < 3^{\frac{2(n+1)}{3}} \\ 2 \cdot 3^q < 2^{n+1} = 2 \cdot 8^{\frac{n}{3}} < 2 \cdot 3^{\frac{2(n+1)}{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{2(n+1)}{3} \\ q < \frac{2(n+1)}{3} \end{cases}$$

$$\text{Mà } p+q=n \Rightarrow p, q > \frac{n-2}{3} \Rightarrow \frac{n-2}{3} < p, q < \frac{2(n+1)}{3} \quad (1)$$

Đặt $k = \min\{p, q\}$. Từ (1) ta có $k > \frac{n-2}{3}$ mà $n \geq 6 \Rightarrow k > 1$

Từ (**) ta thấy $3^p + 2 \cdot 3^q : 3^k \Rightarrow 2^{n+1} - 1 : 3^k$

Do $k > 1 \Rightarrow 2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{9}$

Mặt khác $\text{ord}_9(2)=6$ nên $2^{n+1} - 1 \equiv 0 \pmod{9} \Leftrightarrow n+1 \equiv 0 \pmod{6}$

$$\Rightarrow n+1 = 6h, h \in \mathbb{Z}_+$$

Khi đó $2^{n+1} - 1 = 2^{6h} - 1 = 4^{3h} - 1$

$$2^{n+1} - 1 = (4^h - 1)(4^{2h} + 4^h + 1) = (2^h - 1)(2^h + 1)(4^{2h} + 4^h + 1)$$

$$\text{Mà } (4^{2h} + 4^h + 1) = (4^h - 1)^2 + 3 \cdot 4^h \equiv 0 \pmod{3}$$

Nhưng $(4^h - 1)^2 + 3 \cdot 4^h \not\equiv 0 \pmod{9}$. Do $2^h + 1; 2^h - 1$ là hai số lẻ nguyên tố cùng nhau và có hiệu là 2 nên $(2^h - 1)(2^h + 1) : 3^{k-1}$ khi một trong hai số đó chia hết cho 3^{k-1}

$$+) \quad 3^{k-1} \leq 2^h + 1 \Rightarrow 3^{k-1} \leq 2^h + 1 \leq 3^k = 3^{\frac{n+1}{6}} \Rightarrow \frac{n-2}{3} - 1 \leq k - 1 \leq \frac{n+1}{6}$$

$$\Leftrightarrow n < 11$$

Mà $n \geq 6; n+1 \equiv 0 \pmod{6} \Rightarrow$ vô lí

Vậy phương trình chỉ có nghiệm $(m, n) = (5; 2); (8; 2); (8; 5); (53; 5)$