Ứng dụng phương pháp xác suất vào lý thuyết đồ thị

Trương Phước Nhân, 16/11/2018

Nội dung của bài viết chủ yếu trình bày một số bài toán ví dụ cho ứng dụng của phương pháp xác suất trong toán tổ hợp.

Bài toán 1. (Erdos)

Cho số nguyên dương $k \geq 3$. Chứng minh rằng tồn tại một cách tô màu xanh hoặc đỏ các cạnh của đồ thị có $n = \left\lfloor 2^{\frac{k}{2}} \right\rfloor$ đỉnh sao cho không tồn tại k đỉnh nào mà tất cả các cạnh nối giữa k đỉnh này được tô bởi cùng một màu.

Lời giải 1.

Với một cạnh bất kì, ta tô màu nó một cách ngẫu nhiên một trong hai màu xanh và đỏ với cùng xác suất bằng $\frac{1}{2}$.

Xét xác suất của biến cố A: tồn tại k đỉnh mà các cạnh nối giữa chúng cùng màu.

Dễ thấy $A = A_r \cup A_b$ trong đó A_r và A_b lần lượt là các biến cố tồn tại k đỉnh mà các cạnh nối giữa chúng cùng màu đỏ hoặc xanh.

Nhận xét rằng $A_r = \bigcup\limits_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} A_r\left(i_1, i_2, \ldots, i_k\right)$, trong đó n là số đỉnh của đồ thị đang xét còn $A_r\left(i_1, i_2, \ldots, i_k\right)$ là biến cố mà các cạnh nối giữa các đỉnh $i_1, i_2, \ldots, i_k$ được tô màu đỏ và do với k đỉnh ta sẽ có $\binom{k}{2}$ cạnh nối và việc tô màu các cạnh là độc lập nên $P\left(A_r\left(i_1, i_2, \ldots, i_k\right)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$.

$$\Rightarrow P\left(A_r\right) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_r\left(i_1, i_2, \ldots, i_k\right)\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Lập luận tương tự ta có

$$P\left(A_d\right) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P\left(A_d\left(i_1, i_2, \ldots, i_k\right)\right) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Vậy nên

$$P(A) \leq P\left(A_r\right) + P\left(A_b\right) \leq 2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}.$$

Từ đánh giá quen thuộc $k! > 2^{1+\frac{k}{2}}$ với $k \geq 3$, ta có $2\binom{n}{k} = \frac{2}{k!} n(n-1)\ldots(n-k+1) < \frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}}}$, nên khi $n = \left\lfloor 2^{\frac{k}{2}} \right\rfloor \leq 2^{\frac{k}{2}}$ ta có $2\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}} < \frac{n^k}{2^{\frac{k}{2}}} \cdot \frac{1}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}} \leq 1$.

Khi đó $P(A) < 1$, hay xác suất để có k đỉnh mà các cạnh nối giữa chúng cùng màu là nhỏ hơn 1, suy ra không phải mọi cách tô màu trên đồ thị với $n = \left\lfloor 2^{\frac{k}{2}} \right\rfloor$ đỉnh đều thỏa mãn tính chất trên và do đó sẽ có một cách tô màu nào đó mà không thể tìm được k đỉnh có các cạnh nối cùng màu.

Lưu ý.

Đây là một trong những ví dụ đầu tiên minh họa cho việc áp dụng lý thuyết xác suất vào những bài toán Tổ hợp và Đồ thị của tác giá Erdos. Bài toán này liên quan đến số Ramsey $R(m,n)$ - số đỉnh nhỏ nhất cần thiết của một đồ thị sao cho với mọi cách tô màu xanh hoặc đỏ các cạnh thì luôn tồn tại m đỉnh mà các cạnh nối đều tô màu xanh hoặc n đỉnh mà các cạnh nối đều tô màu đỏ. Kết quả của bài toán chứng minh rằng $R(k,k) > 2^{\frac{k}{2}}$. Ngược điểm của phương pháp xác suất đó là chỉ chứng minh được sự tồn tại mà không chỉ ra được cách tô màu tường minh. Ý tưởng chính trong lời giải sử dụng phương pháp xác suất đó là: thay vì đưa ra lời giải có tính chất địa phương bằng cách chỉ ra một cách tô màu cụ thể nhằm phá vỡ tính chất cạnh đồng màu của các bộ k điểm (rất khó thực hiện khi k lớn) thì ta hãy nhìn bài toán theo hướng toàn cục, tức là xét tất cả các cấu hình (cách tô màu) có thể và chứng minh không phải cấu hình nào cũng thỏa mãn.

Lời giải 2.

Ta xét tất cả các cách tô màu, có tổng cộng $2^{\binom{n}{2}}$ cách. Ta sẽ chứng minh không phải cách tô màu nào cũng thỏa mãn yêu cầu bài toán, tức là số cách tô màu sao cho tồn tại ít nhất một bộ k đỉnh có các cạnh nối cùng màu là nhỏ hơn hẳn $2^{\binom{n}{2}}$.

Thật vậy, ta thấy rằng số cách tô màu thỏa mãn không lớn hơn $C_r + C_b$ trong đó C_r (tương ứng C_b) là số cách tô màu thỏa mãn tồn tại k đỉnh có các cạnh nối cùng màu đỏ (tương ứng xanh).

Xét một bộ gồm k đỉnh cố định thì số cách tô màu thỏa mãn các cạnh nối trong bộ k đỉnh này cùng màu đỏ là $2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$, do có tất cả $\binom{n}{2}$ cạnh và ta đã cố định màu của $\binom{k}{2}$ cạnh nối trong bộ k đỉnh. Mà từ n đỉnh có $\binom{n}{k}$ cách chọn bộ k đỉnh như trên, nên ta thu được $C_r \le \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$.

Lập luận tương tự ta cũng chứng minh được $C_b \le \binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}}$.

Nhận thấy rằng $C_r + C_b \le 2\binom{n}{k} 2^{\binom{n}{2}-\binom{k}{2}} < 2^{\binom{n}{2}}$.

Từ đây suy ra điều phải chứng minh.

Lưu ý.

Về mặt bản chất thì hai lời giải đều như nhau nên ta có thể chọn lựa cách giải phù hợp cho bản thân mình!

Bài toán 2. (Erdos)

Chứng minh rằng nếu hai số nguyên dương n và k thỏa mãn $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$ thì ta có thể định hướng các cạnh trên một đồ thị đầy đủ với n đỉnh sao cho với mọi bộ k đỉnh bất kì luôn có một đỉnh khác đi đến bộ k đỉn này.

Chứng minh.

Định hướng trên các cạnh một cách ngẫu nhiên với xác suất bằng đều và độc lập với nhau. Xét biến cố B: tồn tại một bộ k đỉnh nào đó sao cho không có đỉnh nào đi đến bộ k đỉnh này.Xét một bộ k đỉnh cố định. Xác suất để một đỉnh cố định không đi đến bộ k đỉnh này sẽ bằng $1-2^{-k}$. Do đó xác suất để không có đỉnh nào đi đến bộ k đỉnh này sẽ bằng $(1-2^{-k})^{n-k}$ (vì còn lại $n-k$ đỉnh).

Do có tất cả $\binom{n}{k}$ cách chọn các bộ k đỉnh nên $P(B) \le \binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$.

Điều phải chứng minh.

Bài toán 3.

Cho đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh sao cho bậc của mỗi đỉnh đều không bé hơn $\delta > 1$.

Chứng minh rằng ta luôn có thể chọn ra một tập ổn định ngoài có số đỉnh không vượt quá $n.\dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$.

Chứng minh.

Chọn ngẫu nhiên và độc lập các đỉnh thuộc tập đỉnh V vào một tập con X với xác suất $p \in [0;1]$ cho mỗi lần chọn. Gọi Y là tập các đỉnh thuộc $V \setminus X$ mà không kề với đỉnh nào thuộc X. Khi đó tập $X \cup Y$ là một tập ổn định ngoài. Ta sẽ tính kì vọng của số đỉnh thuộc vào $X \cup Y$.

Biểu diễn số đỉnh thuộc X thành tổng các chỉ báo phần tử có được chọn hay không, ta có $E(|X|) = np$.

Xét một đỉnh $v \in V$, ta thấy rằng

$$P(v \in V) = P(v \text{ và các đỉnh kề không thuộc } V) = (1-p)^{d(v)+1} \le (1-p)^{\delta+1}.$$

Điều này dẫn đến khi ta biểu diễn số phần tử thuộc Y thành tổng các biến chỉ báo,
ta có $E(|Y|) \le n(1-p)^{\delta+1}$.

$\Rightarrow E(|X \cup Y|) \le E(|X|) + E(|Y|) \le np + n(1-p)^{\delta+1}$.

Do đó, tồn tại một cách chọn $X \subseteq V$ sao cho $|X \cup Y| \le np + n(1-p)^{\delta+1}$.

Nếu ta đặt $U = X \cup Y$ thì rõ rằng U là một tập ổn định ngoài trong G và sử dụng đánh giá $e^{-p} \ge 1-p$, ta được $|U| \le np + n(1-p)^{\delta+1} \le np + ne^{-p(\delta+1)}$.

Do hàm $f(p) = np + ne^{-p(\delta+1)}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $p = \dfrac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}$, nên $|U| \le f\left(\dfrac{\ln(\delta+1)}{\delta+1}\right) = n.\dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$

Lưu ý: Xem thêm nội dung của bài viết **"Phương pháp xác suất"** ta có một đánh giá tương tự bằng phương pháp xác suất cho độ lớn của số phần tử của một tập ổn định trong.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Phước Nhân, Phương pháp xác suất, 09/07/2017.
[2]. Lê Anh Vinh, Định hướng bồi dưỡng học sinh giỏi toán, ??/??/????