Ứng dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ mở rộng

Trương Phước Nhân, 15/07/2018

1. Công thức của nguyên lý bao hàm-loại trừ mở rộng

Xét N vật $a_1,...,a_N$ với các trọng lượng $\omega(a_1),...,\omega(a_N)$, là các phần tử của một vành K, và n tính chất $A_1,...,A_n$. Mỗi một này có thể nhận một số tính chất nào đó trong số các tính chất $A_1,...,A_n$.

Ký hiệu $M(r)$ là tổng trọng lượng của các vật có chính xác r tính chất,

$M\left(A_{j_1},...,A_{j_k}\right)$ là tổng trọng lượng của các vật có tất cả các tính chất $A_{j_1},...,A_{j_k}$.

Ta sẽ chứng minh rằng $M(r)=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}S_k$, $r=0,1,...,n$, trong đó $S_k=\sum_{1\le j_1<...<j_k\le n} M\left(A_{j_1},...,A_{j_k}\right)$.

Để chứng minh tính đúng đắn của hệ thức trên ta chỉ cần chỉ ra rằng chỉ có trọng lượng của các phần tử có chính xác r tính chất được chứa trong vế phải của hệ thức trên và mỗi trọng lượng này chỉ xuất hiện đúng một lần.

Thật vậy, trọng lượng của các vật có chính xác r tính chất chỉ được tính đúng một lần trong tổng S_r và không tham gia trong các tổng S_k với $k>r$. Trọng lượng của một vật nhận $\mu>r$ tính chất xuất hiện trong tổng $S_k, k>r$, chính xác $\binom{\mu}{k}$ lần. Do đó, số lần xuất hiện của trọng lượng của các phần tử này trong tổng bằng

$$\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{\mu}{k}=\binom{\mu}{k}\sum_{j=0}^{\mu-r}(-1)^{j}\binom{\mu-r}{j}=0,\ \mu>r.$$

Hiển nhiên rằng trọng lượng của các phần tử nhận ít hơn r tính chất không xuất hiện trong tổng ở vế phải. Do đó công thức được chứng minh.

2. Một số ứng dụng

2.1. Tính số các hoán vị có đúng r điểm bất động

Cho S_n là nhóm đối xứng bậc n.

Ta định nghĩa hàm ρ như sau: $\rho(s,s')=\left|\{i: s(i)\ne s'(i), 1\le i\le n\}\right|$, với mọi $s,s'\in S_n$.

Hàm ρ thỏa mãn các tính chất của một metric:

(1) $\rho(s,s')=0$ khi và chỉ khi $s=s'$.

(2) $\rho(s,s')=\rho(s',s)$ với mọi s,s'.

(3) $\rho(s,s'')\le\rho(s,s')+\rho(s',s'')$.

Thật vậy, nếu $A=\{i: s(i)=s'(i)\}$, $A=\{i: s(i)=s'(i)\}$ và $A=\{i: s(i)=s'(i)\}$ thì $A\cap B\subseteq C$.

Do đó, bằng cách phần bù, $\overline{A}\cup\overline{B}\supseteq\overline{C}$ nên $\left|\overline{C}\right|\le\left|\overline{A}\right|+\left|\overline{B}\right|$, bất đẳng thức tam giác được chứng minh.

Bây giờ ta cố định một hoán vị $s_0\in S_n$ và với mỗi $s\in S_n$ ta đặt $A_i=\{s(i)=s_0(i)\}$, $i=1,...,n$.

Khi đó, số các hoán vị chỉ nhận các tính chất $A_{j_1},...,A_{j_k}, 1\le j_1<...<j_k\le n$, bằng $M\left(A_{j_1},...,A_{j_k}\right)=(n-k)!$

Ký hiệu $h_{n,r}$ là sô các hoán vị của S_n có chính xác r điểm bất động.

Khi đó: $h_{n,r}=\left|\{s_0:\rho(s,s_0)=n-r, s\in S_n\}\right|$.

Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ mở rộng ta thu được

$$h_{n,r}=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k}{r}\binom{n}{k}(n-k)!,\ r=0,1,...,n.$$

Sau khi thu gọn ta được $h_{n,r}=\dfrac{n!}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\dfrac{(-1)^k}{k!}$, $r=0,1,...,n$.

2.2. Công thức Ryser

Xét ma trận $A=\left(a_{ij}\right)_{i=1,\dots,n;\ j=1,\dots,m}$, $n\le m$, trong đó các phần tử của ma trận nằm trên một vành K.

Nhà toán học Ryser đã chỉ ra rằng ta có thể tính permanent của ma trận A như sau:

$$\mathrm{per}A=\sum_{k=m-n}^{m}(-1)^{k-m+n}\binom{k}{m-n}S_k\ ,$$

trong đó $S_k=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le m}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i1}+\dots+a_{im}-a_{ij_1}-\dots-a_{ij_k}\right)$.

Sau đây ta sẽ sử dụng nguyên lý bao hàm-loại trừ mở rộng để chứng minh lại tính đúng đắn của kết quả này.

Ta sẽ chọn các "vật" là m^n ánh xạ từ tập $\{1,\dots,n\}$ vào tập $\{1,\dots,m\}$ và ta thực hiện gán cho ánh xạ $\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n\\ l_1 & l_2 & \dots & l_n\end{pmatrix}$ trọng lượng $a_{1l_1}\dots a_{nl_n}$.

Ký hiệu A_j là tính chất ánh xạ không nhận giá trị j, tức là không có j trong các số $l_1,\dots,l_n$, $j=1,\dots,m$.

Từ định nghĩa của permanent của ma trận ta suy ra $\mathrm{per}A$ bằng tổng trọng lượng của các ánh xạ nhận chính xác $m-n$ tính chất trong số các tính chất $A_1,\dots,A_n$.

Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ mở rộng ta thu được

$$\mathrm{per}A=\sum_{k=m-n}^{m}(-1)^{k-m+n}\binom{k}{m-n}\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}M\left(A_{j_1},\dots,A_{j_k}\right).$$

Dễ dàng nhận thấy tổng trọng lượng của tất cả các ánh xạ bằng $\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i1}+\dots+a_{im}\right)$.

Để tính tổng trọng lượng $M\left(A_{j_1},\dots,A_{j_k}\right)$ ta chỉ cần loại đi các phần tử $a_{ij_1},\dots,a_{ij_k}$, $i=1,\dots,n$, nên

$$M\left(A_{j_1},\dots,A_{j_k}\right)=\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i1}+\dots+a_{im}-a_{ij_1}-\dots-a_{ij_k}\right).$$

Thay kết quả vừa tính được vào biểu thức trên ta nhận được công thức Ryser.

Với $m=n$, công thức Ryser có dạng đặc biệt

$$\mathrm{per}A=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}\prod_{i=1}^{n}\left(a_{i1}+\dots+a_{im}-a_{ij_1}-\dots-a_{ij_k}\right).$$

2.3. Bất đẳng thức Bonferroni

Trước khi tiến hành chứng minh bất đẳng thức Bonferroni ta sẽ hoàn thiện thêm nguyên lý bao hàm – loại trừ.

Ký hiệu M_r là tổng trọng lượng của các vật nhận không ít hơn r tính chất trong trong tính chất $A_1,\dots,A_n$.

Ta sẽ chứng minh rằng $M_r=\sum_{k=r}^{n}(-1)^{k-r}\binom{k-1}{k-r}S_k$, $r=0,1,\dots,n$,

trong đó $S_k=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n}M\left(A_{j_1},\dots,A_{j_k}\right)$, $k=0,1,\dots,n$.

Thật vậy, $M_r=\sum_{l=r}^{n}M(l)=\sum_{l=r}^{k}S_k\sum_{l=r}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}$.

Chú ý rằng: $\sum_{l=r}^{k}(-1)^{k-l}\binom{k}{l}=\sum_{l=0}^{k-r}(-1)^{l}\binom{k}{l}=(-1)^{k-r}\binom{k-1}{k-r}$, vì $\sum_{l=0}^{k-r}(-1)^{l}\binom{k}{l}$ là hệ số x^{k-r} của $\dfrac{(1-x)^k}{1-x}=(1-x)^{k-1}$.

Thay kết quả vừa tìm được vào biểu thức tính ta thu được điều phải chứng minh.

Tiếp theo, ta cũng nhận thấy rằng từ nguyên lý bao hàm – loại trừ ta thu được

$$S_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} M(j), k = 0,1,...,n.$$

Thật vậy, $\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} M(j) = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} \sum_{l=j}^{n} (-1)^{l-j} \binom{l}{j} S_l = \sum_{l=k}^{n} S_l \sum_{j=k}^{l} (-1)^{l-j} \binom{j}{k}\binom{l}{j}$.

Bằng một số phép biến đổi đơn giản ta chứng minh được rằng

$$\sum_{j=k}^{l} (-1)^{l-j} \binom{j}{k}\binom{l}{j} = \begin{cases} 1, & l = k, \\ 0, & l = k. \end{cases}$$

Từ đây ta nhận được điều phải chứng minh.

Giả sử thêm rằng trọng lượng của tất cả các vật đều là các số thực không âm.

Khi đó: $\sum_{k=r}^{r+2v-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k \le M(r) \le \sum_{k=r}^{r+2v} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k$, trong v đó là số tự nhiên thỏa mãn $r + 2v \le n$.

Từ nguyên lý bao hàm – loại trừ, với mọi $r \le d \le n$, ta có

$$M(r) - \sum_{k=r}^{d-1} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} S_k = (-1)^{d-r} U(d,r), \text{ trong đó } U(d,r) = \sum_{k=d}^{n} (-1)^{k-d} \binom{k}{r} S_k.$$

Khi ta thay d lần lượt bởi $r + 2v$ và $r + 2v + 1$ ta nhận thấy rằng đánh giá cần chứng minh của ta luôn tương đương với sự kiện $U(d,r) \ge 0$. Do vậy ta chỉ cần chứng minh $U(d,r) \ge 0, r \le d \le n$.

Thật vậy, $U(d,r) = \sum_{j=d}^{n} M(j) \sum_{k=d}^{j} (-1)^{k-d} \binom{k}{r}\binom{j}{k}$.

Chú ý rằng $\sum_{k=d}^{j} (-1)^{k-d} \binom{k}{r}\binom{j}{k} = \binom{j}{r}\binom{j-r-1}{d-r-1}$, nên $U(d,r) = \sum_{j=d}^{n} M(j) \binom{j}{r}\binom{j-r-1}{d-r-1} \ge 0$.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Phước Nhân, Công thức tính số derangement, 21/09/2017.
[2]. Trương Phước Nhân, Permanent, 03/03/2018.
[3]. Trương Phước Nhân, Phương pháp đếm bằng nguyên lý bao hàm – loại trừ, 02/07/2018.
[4]. Vladimir N. Sachkov, Combinatorial Methods in Discrete Mathematics, Cambridge University Press