# Hệ số đa thức

Trương Phước Nhân, 13/11/2018

Cho trước các số nguyên không âm $k_1,...,k_r$ sao cho $k_1+...+k_r=n$.

Khi đó, ta định nghĩa **hệ số đa thức** $\binom{n}{k_1,...,k_r}$ là hệ số trong khai triển của lũy thừa bậc $n$ của tổng của $r$ biến, cụ thể

$$\left(x_1+...+x_r\right)^n=\sum_{\substack{k_1,...,k_r\\k_1+...+k_r=n}}\binom{n}{k_1,...,k_r}x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_r^{k_r}.$$

**Ví dụ 1.**

Khai triển đa thức $\left(x_1+x_2+x_3\right)^4$:

$$\begin{aligned}\left(x_1+x_2+x_3\right)^4=1.&\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4\right)\\ +4.&\left(x_1^3x_2+x_1^3x_3+x_1x_2^3+x_2^3x_3+x_1x_3^3+x_2x_3^3\right)\\ +6.&\left(x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2\right)\\ +12.&\left(x_1^2x_2x_3+x_1x_2^2x_3+x_1x_2x_3^2\right).\end{aligned}$$

Khi đó hệ số của $x_1^2x_2x_3$ là 12, hệ số của $x_1^2x_3^2$ là 6 và hệ số của $x_3^4$ là 1.

Điều đó có nghĩa: $\binom{4}{2,1,1}=12, \binom{4}{2,0,2}=6, \binom{4}{0,0,4}=1$.

**Định lí hệ số đa thức.**

Cho trước các số nguyên không âm $k_1,...,k_r$ sao cho $k_1+...+k_r=n$.

Khi đó:

$$\binom{n}{k_1,...,k_r}=\binom{n}{k_1}.\binom{n-k_1}{k_2}...\binom{n-k_1-...-k_{r-1}}{k_r}=\frac{n!}{k_1!.k_2!...k_r!}.$$

**Ví dụ 2.**

$$\binom{4}{2,1,1}=\frac{4!}{2!1!1!}=12$$

$$\binom{4}{2,0,2}=\frac{4!}{2!0!2!}=6$$

$$\binom{4}{0,0,4}=\frac{4!}{0!0!4!}=1$$

**Chứng minh định lí hệ số đa thức.**

Khai triển đa thức $\left(x_1+...+x_r\right)^n$:

$$\left(x_1+...+x_r\right)^n=\sum_{i_1=1}^{r}\sum_{i_2=1}^{r}....\sum_{i_n=1}^{r}x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}.$$

Đơn thức $x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_n}$ bằng $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_r^{k_r}$ nếu trong các chỉ số $i_1,...,i_n$ có chính xác $k_1$ chỉ số bằng 1, $k_2$ chỉ số bằng 2,…, $k_r$ chỉ số bằng $r$

Để xác định hệ số đa thức $\binom{n}{k_1,...,k_r}$ ta sẽ đếm số các bộ $\left(i_1,...,i_n\right)$ sao cho có chính xác $k_1$ chỉ số bằng 1, $k_2$ chỉ số bằng 2,…, $k_r$ chỉ số bằng $r$, cụ thể:

● Chọn $k_1$ chỉ số bằng 1: $\binom{n}{k_1}$ cách thực hiện.

● Chọn $k_2$ chỉ số bằng 2: $\begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$ cách thực hiện.

…

● Chọn $k_j$ chỉ số bằng $j$: $\begin{pmatrix} n-k_1-...-k_{j-1} \\ k_j \end{pmatrix}$ cách thực hiện.

…

Tóm lại từ các phân tích trên ta nhận được

$$\begin{pmatrix} n \\ k_1,...,k_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ k_1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n-k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} ... \begin{pmatrix} n-k_1-...-k_{r-1} \\ k_r \end{pmatrix}$$

$$= \frac{n!}{k_1!(n-k_1)!} . \frac{(n-k_1)!}{k_2!(n-k_1-k_2)!} ... \frac{(n-k_1-...-k_{r-1})!}{k_r!(n-k_1-...-k_r)!}$$

$$= \frac{n!}{k_1!\cancel{(n-k_1)!}} . \frac{\cancel{(n-k_1)!}}{k_2!\cancel{(n-k_1-k_2)!}} ... \frac{\cancel{(n-k_1-...-k_{r-1})!}}{k_r!(n-k_1-...-k_r)!}$$

Đồng thời, $(n-k_1-...-k_r)! = (n-n)! = 0! = 1$

nên $\begin{pmatrix} n \\ k_1,...,k_r \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{k_1!.k_2!...k_r!}$.

Tương tự như trong trường hợp hệ số nhị thức, ta có kết quả sau:

**Công thức Pascal.**

Cho trước $n \geq 1$ và $k_1,...,k_r \geq 0$ sao cho $k_1+...+k_r = n$.

Khi đó: $\begin{pmatrix} n \\ k_1,...,k_r \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \begin{pmatrix} n-1 \\ k_1,...,k_i-1,k_r \end{pmatrix}$.

**Chứng minh công thức Pascal.**

Từ định nghĩa của hệ số đa thức ta có

$$(x_1+...+x_r)^n = \sum_{\substack{k_1,...,k_r \\ k_1+...+k_r=n}} \begin{pmatrix} n \\ k_1,...,k_r \end{pmatrix} x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_r^{k_r} .$$

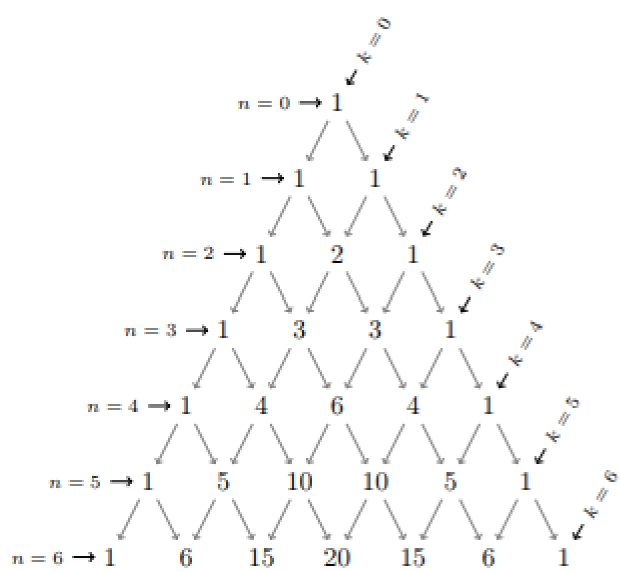
Mặt khác, cũng lại khai thác từ định nghĩa hệ số đa thức, ta có:

$$(x_1+...+x_r)^n$$

$$= (x_1+...+x_r)(x_1+...+x_r)^{n-1}$$

$$= (x_1+x_2+...+x_r) . \sum_{\substack{k'_1,...,k'_r \geq 0 \\ k'_1+...+k'_r=n-1}} \begin{pmatrix} n-1 \\ k'_1,...,k'_r \end{pmatrix} x_1^{k'_1} x_2^{k'_2} ... x_r^{k'_r}$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{k'_1,...,k'_r \geq 0 \\ k'_1+...+k'_r=n-1}} \begin{pmatrix} n-1 \\ k'_1,...,k'_r \end{pmatrix} x_1^{k'_1} ... x_i^{k'_i+1} ... x_r^{k'_r}$$




Hình vẽ minh họa cho "tam giác Pascal"

Bằng cách đặt $k_i := k_i' + 1$ và $k_j := k_j'$ ( $j \neq i$ ) ta thu được:

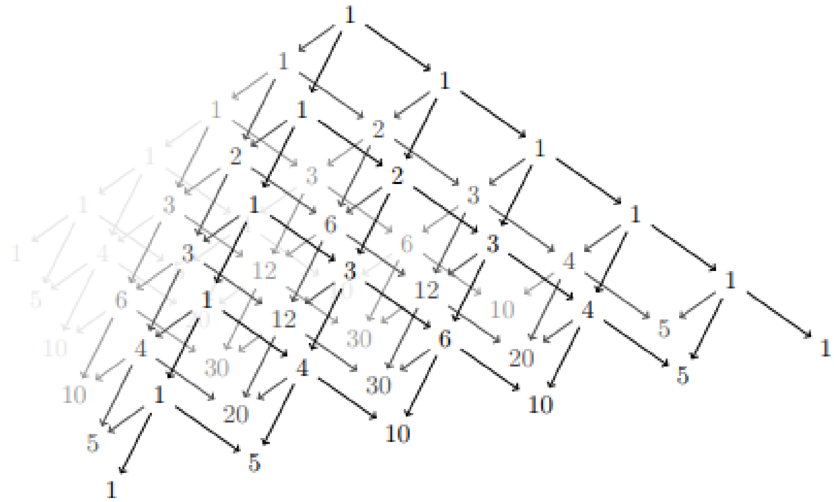
$$\left(x_1 + \ldots + x_r\right)^n$$

$$= \sum_{i=1}^{r} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geq 0 \\ k_i - 1 \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \binom{n-1}{k_1,\ldots,k_i - 1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$$

$$= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_r \geq 0 \\ k_1 + \ldots + k_r = n}} \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1,\ldots,k_i - 1,\ldots,k_r} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r} .$$

Đồng nhất hệ số $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_r^{k_r}$ , ta được:

$$\binom{n}{k_1,\ldots,k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1,\ldots,k_i - 1, k_r}.$$



Hình vẽ minh họa cho “hình kim tự tháp Pascal”

**Tài liệu tham khảo:**


Torsten Ueckerdt, Lecture Notes Combinatorics, July 19 2016