Định lý Hall và ứng dụng

Trương Phước Nhân, 14/12/2018

Bài toán hôn nhân.

Cho trước n chàng trai và một số cô gái. Biết rằng một nhóm k chàng trai bất kỳ trong đó thì quen với ít nhất k cô gái ($1 \le k \le n$).

Khi đó, điều kiện cần và đủ để tổ chức đám cưới tập thể sao cho mỗi chàng trai cưới một cô gái mà mình quen.

<u>Định lý 1</u> (Định lý Hall dạng tập hợp)

Giả sử có n chàng trai. Gọi $A_i, i = 1,...,n$, là tập các cô gái mà chàng trai thứ i quen, $A_i \ne \phi$, $\forall i = 1,2,...,n$.

Khi đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ sao cho $a_i \ne a_j$ với mọi $i \ne j$ là với mọi chỉ số $i_1, i_2, ..., i_k$ thuộc $\{1,2,...,n\}$ ta đều có $\left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}\right| \ge k$ (điều kiện Hall)

Một bộ $(a_1, a_2, ..., a_n)$ như vậy được gọi là một ***hệ đại diện phân biệt*** (***system of distinct representatives*** hoặc ***transversal***) cho hệ tập hợp $(A_1, A_2, ..., A_n)$, viết tắt là SDR, phần tử $a_i \in A_i$ được gọi là đại diện của $A_i, i = 1,...,n$. Như vậy một hệ tập $(A_1, A_2, ..., A_n)$ tồn tại một SDR khi và chỉ khi nó thỏa mãn điều kiện Hall.

<u>Chứng minh bằng ngôn ngữ tập hợp.</u>

Ta sẽ chia phép chứng minh thành hai phần.

Chiều thuận.

Rõ ràng nếu hệ $(A_1, A_2, ..., A_n)$ có một SDR thì hệ $(A_1, A_2, ..., A_n)$ thỏa mãn điều kiện Hall.

Thật vậy, với mọi $k \in \{1,2,...,n\}$, do $a_{i_1} \in A_{i_1}, ..., a_{i_k} \in A_{i_k}$ nên $a_{i_s} \ne a_{i_t}$ với $s \ne t$.

Do đó, $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k} \subset A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k} \Rightarrow \left|A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}\right| \ge k$.

Chiều đảo.

Giả sử hệ $(A_1, A_2, ..., A_n)$ thỏa mãn điều kiện Hall.

Bằng cách bỏ đi một số phần tử thuộc mỗi tập A_i sao cho điều kiện Hall vẫn được thỏa mãn.

Khi đó, ta thu được hệ tối giản $(B_1, B_2, ..., B_n)$ vẫn thỏa mãn điều kiện Hall, với $B_i \subset A_i$. (Hệ tối giản được hiểu theo nghĩa nếu như bỏ đi một phần tử từ một tập B_i nào đó trong hệ thì điều kiện Hall không còn được thỏa mãn).

Do hệ $(C_1, C_2, ..., C_n)$, $C_1 = \{a_1\}, C_2 = \{a_2\}, ..., C_n = \{a_n\}$ với $a_i \ne a_j$ $\forall i \ne j$, thỏa mãn điều kiện Hall nên mỗi thành viên trong hệ tối giản $(B_1, B_2, ..., B_n)$ sẽ có tối thiểu một phần tử.

● Ta chứng minh $|B_i| = 1, \forall i = 1,2,...,n$.

Thật vậy, không mất tính tổng quát, giả sử còn tập hợp B_1 chứa hai phần tử phân biệt là x, y.

Khi đó, theo định nghĩa hệ tối giản thì hai hệ $(B_1 \setminus \{x\}, B_2, ..., B_n)$ và $(B_1 \setminus \{y\}, B_2, ..., B_n)$ sẽ không còn thỏa mãn điều kiện Hall.

Dẫn đến tồn tại hai tập chỉ số P và Q sao cho nếu đặt

$$X = (B_1 \setminus \{x\}) \cup \left(\bigcup_{i \in P} B_i\right) \text{ và } Y = (B_1 \setminus \{y\}) \cup \left(\bigcup_{i \in Q} B_i\right)$$

thì ta có $$|X| < |P| + 1, |Y| < |Q| + 1 \Rightarrow |P| \ge |X|, |Q| \ge |Y|$$

● Mặt khác $X \cup Y = B_1 \cup \left(\bigcup_{i \in P \cup Q} B_i\right), \bigcup_{i \in P \cup Q} B_i \subset X \cup Y$.

Dẫn đến $|X \cup Y| \ge |P \cup Q| + 1$, $|X \cap Y| \ge |P \cap Q|$.

● Do đó $|P|+|Q|\ge|X|+|Y|=|X\cap Y|+|X\cup Y|\ge|P\cap Q|+|P\cup Q|+1=|P|+|Q|+1$, vô lí.

Vậy $|B_i|=1,\forall i=1,...,n$.

● Nhận thấy rằng các tập B_i đôi một không giao nhau.

Thật vậy, giả sử $B_i=\{x\}$, $B_j=\{x\}$ thì theo điều kiện Hall ta phải có $1=|B_i\cup B_j|\ge 2$, vô lý.

Do đó, mỗi tập $B_i=\{a_i\}$ với $a_i\ne a_j$ khi $i\ne j$.

Khi đó $a_i\in B_i\subset A_i$ với $a_i\ne a_j$ khi $i\ne j$.

Định lý được chứng minh. □

Từ định lý Hall vừa chứng minh ở trên ta thu được hai hệ quả thú vị sau:

Hệ quả 1.

Cho hệ $(A_i), i=1,2,...,n$, là các tập con của X thỏa mãn

1) $|A_i|=m$, với mọi $i=1,2,...,n$;

2) Mỗi phần tử của X có mặt đúng m lần trong $(A_i), i=1,2,...,n$.

Khi đó, hệ $(A_i), i=1,2,...,n$, có một SDR.

Chứng minh.

Xét tập $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup...\cup A_{i_k}, 1\le i_1<i_2<...<i_k\le n$. Do mỗi tập A_i có k phần tử nên tập $A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup...\cup A_{i_k}$ có tổng cộng $k.m$ phần tử (ở đây đếm theo nghĩa: mỗi phần tử được đếm lặp với số lần xuất hiện của nó trong k tập hợp trên). Do mỗi phần tử của X có mặt đúng m lần trong $(A_i), i=1,2,...,n$, nên mỗi phần tử của S có mặt không quá m lần. Do đó $|A_{i_1}\cup A_{i_2}\cup...\cup A_{i_k}|\ge\frac{k.m}{m}=k$.

Áp dụng định lý Hall, hệ $(A_i), i=1,2,...,n$, có hệ đại diện phân biệt.

Định lý Hall nhấn mạnh đến điều kiện tồn tại hệ đại diện phân biệt. Nếu ta bỏ qua cách phát biểu bằng ngôn ngữ chàng trai và cô gái thì nội dung chính yếu của định lý nói lên rằng:

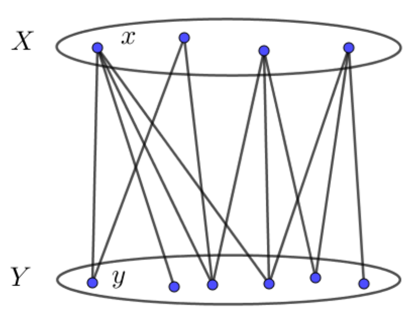
"Cho trước một tập hợp X và họ các tập con $X_1,X_2,...,X_n$ của X.

Khi đó, điều kiện cần và đủ để họ các tập con $(X_1,X_2,...,X_n)$ có một SDR là hợp của bất kỳ k tập con ($k=1,2,...,n$) của họ đều chứa ít nhất k phần tử."

Mặt khác, nếu biểu diễn các chàng trai, hay mỗi tập con, là các điểm trong X còn các cô gái, hay mỗi phần tử, là các điểm trong tập Y.

Một điểm x trong tập X được nối với một điểm y trong tập Y nếu cô gái y quen chàng trai x, hay phần tử y nằm trong tập x.

Khi đó, ta nhận được mô hình đồ thị lưỡng phân $G(X,Y,E)$.



Một ***ghép cặp*** từ X đến Y là một tập hợp các cạnh sao cho không có hai cạnh nào chung nhau đầu mút.

Một ghép cặp được gọi là hoàn hảo khi nó có thể nối tất cả các đỉnh từ X đến Y (lưu ý rằng không cần phải tất cả các đỉnh của Y), tức là tồn tại một đơn ánh từ X đến Y.

Một đồ thị lưỡng phân có thể có nhiều cách ghép cặp hoàn hảo.

Định lý 2. (Định lý Hall dạng đồ thị)

Cho đồ thị lưỡng phân $G(X,Y,E)$. Với mỗi tập con $A \subset X$, ký hiệu $N(A)$ là tập các đỉnh thuộc Y kề với một đỉnh nào đó thuộc A.

Khi đó, điều kiện cần và đủ để tồn tại một đơn ánh $f: X \to Y$ sao cho $f(x)$ là một phần tử nào đó trong Y kề với x là $|N(A)| \ge |A|, \forall \varnothing \ne A \subset X$.

Chứng minh bằng ngôn ngữ ánh xạ.

Ta tiến hành phép chứng minh theo các bước

● Giả sử ánh xạ f là đơn ánh.

Khi đó, với mỗi tập $A = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, tập $N(A)$ sẽ chứa các phần tử phân biệt $f(x_1), ..., f(x_r)$ trong Y mà mỗi phần tử này sẽ kề với một đỉnh thuộc A.

Do đó, $|N(A)| \ge r = |A|$

Điều kiện cần chứng minh.

● Ta chứng minh điều kiện đủ bằng quy nạp.

Khi $|X| = 1$, hiển nhiên.

Giả sử định lý đúng với mọi tập đỉnh X mà $|X| < n$.

Xét tập đỉnh X mà $|X| = n$, xảy ra hai trường hợp:

- Với mọi tập $A \subset X$ ($A \ne X$), $|N(A)| > |A|$.

Chọn phần tử x_0 bất kỳ thuộc X.

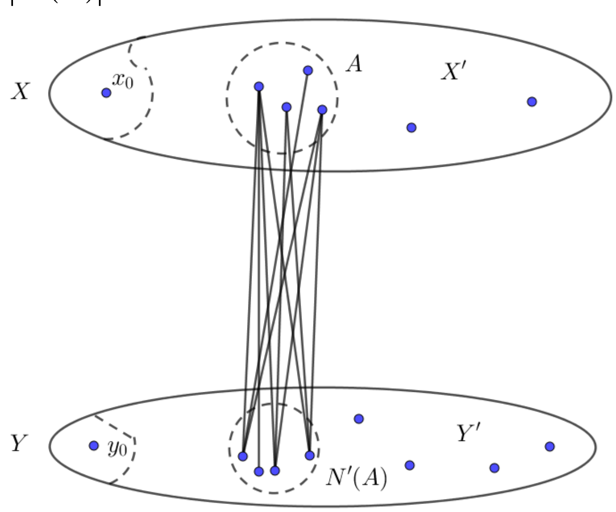
Từ giả thiết ta có $|N(\{x_0\})| \ge 1$ nên tồn tại $y_0 \in Y$

Đặt $f(x_0) = y_0$.

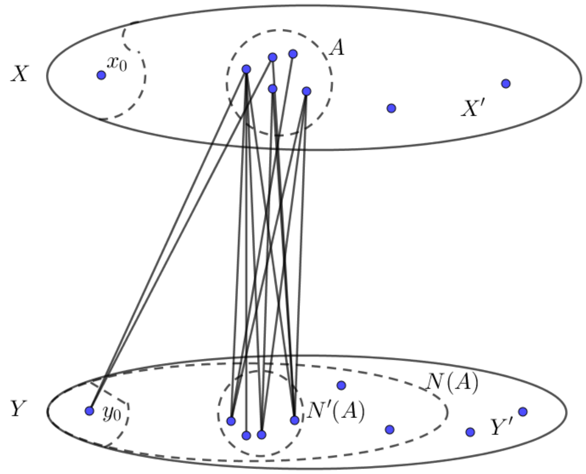
Xét hai tập $X' = X \setminus \{x_0\}, Y' = Y \setminus \{x_0\}$.

Khi đó lấy $A \subset X'$ tùy ý, kí hiệu $N'(A)$ là tập các đỉnh thuộc Y' mà các đỉnh này kề với một đỉnh nào đó của A.

Nếu $y_0 \notin N(A)$ thì $|N'(A)| = |N(A)|$,



còn nếu $y_0 \in N(A)$ thì $|N'(A)| = |N(A)| - 1$.



Do đó ta có $\left|N'(A)\right| \geq \left|N(A)\right|-1 > |A|-1 \Rightarrow \left|N'(A)\right| \geq |A|$.

Do $X' \subset X$ nên theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh $f: X' \to Y'$ sao cho $f(x)$ kề x, với mọi $x \in X'$.

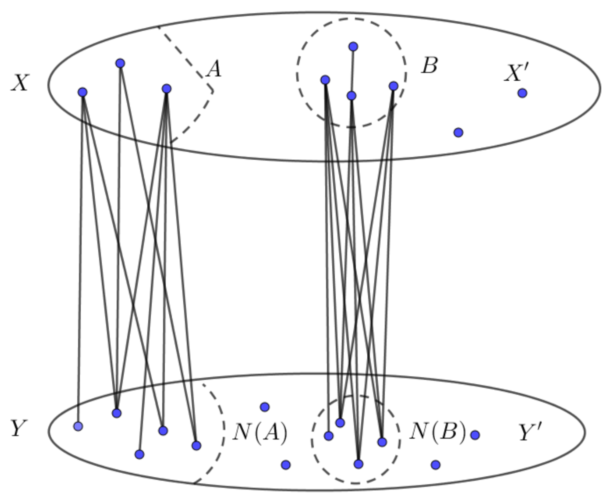
Bằng cách bổ sung thêm $f(x_0) = y_0$ ta thu được đơn ánh $f: X \to Y$ thỏa mãn yêu cầu định lý Hall.

- Tồn tại $A \subset X$ ($A \neq X$) mà $\left|N(A)\right| = |A|$.

Khi đó, do $|A| < |X|$, áp dụng giả thiết quy nạp tồn tại đơn ánh $f: A \to N(A)$.

Đặt $X' = X \setminus A, Y' = Y \setminus N(A)$.

Bây giờ ta lấy tập $B \subset X'$ và $N(B)$ là tập các đỉnh thuộc Y' mà mỗi đỉnh kề với một đỉnh nào đó thuộc B.



Nếu $\left|N(B)\right| < |B|$ thì $\left|N(A \cup B)\right| = \left|N(A)\right| + \left|N(B)\right| < |A| + |B| = |A \cup B|$, mâu thuẫn với giả thiết bài toán.

Do đó ta phải có $\left|N(B)\right| \geq |B|$, với mọi tập $B \subset X'$.

Theo giả thiết quy nạp, tồn tại đơn ánh $g: X' \to Y'$ sao cho $g(x) \in Y'$ kề với $x \in X'$.

Như vậy, ta có thể xây dựng đơn ánh $h: X \to Y$ sao cho $h(x) = f(x), \forall x \in A$ và $h(x) = g(x), \forall x \in X \setminus A$. □

Từ dạng đồ thị của định lý Hall ta suy ra:

<u>Hệ quả 2.</u>

Cho $G = (X, Y, E)$ là một đồ thị lưỡng phân.

Nếu tồn tại số nguyên dương k sao cho với mọi đỉnh $x \in X$ và mọi đỉnh $y \in Y$ thì $d(x) \geq k$, $d(y) \leq k$ ($d(t)$ là bậc của đỉnh t). Khi đó tồn tại một cách ghép cặp hoàn hảo từ X đến Y.

Chứng minh.

Xét A là một tập con gồm các đỉnh thuộc tập X.

Khi đó có ít nhất $k|A|$ cạnh nối các đỉnh trong A.(*hiển nhiên các đỉnh còn lại nằm trong* $R(A)\subset Y$)

Do mỗi đỉnh trong $R(A)$ được nối với nhiều nhất là k cạnh.

Do đó trong $R(A)$ có ít nhất $|A|$ đỉnh, hay $|R(A)|\geq|A|$.

Áp dụng định lý Hall tồn tại một cách ghép cặp hoàn hảo từ X đến Y.

Một số ứng dụng của định lý Hall vào các bài toán tổ hợp.

Định lý Sperner.

Giả sử S là họ tập Sperner các tập con của $\{1,2,...,n\}$, nghĩa là nếu $A,B\in S$ và $A\neq B$ thì $A\not\subset B$ và $B\not\subset A$.

Khi đó, $|S|\leq\binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor}$.

Chứng minh.

Để chứng minh định lí Sperncer ta cần bổ đề sau:

Bổ đề 1.

Giả sử $A_1,A_2,...,A_m$ là các tập con chứa k phần tử phân biệt của tập $\{1,2,...,n\}$, với $k\geq\left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor+1$.

Đặt $\mathcal{B}_i=\{B\subset A_i:|B|=k-1\},1\leq i\leq m$.

Khi đó, $\{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2,...,\mathcal{B}_m\}$ có một SDR.

Chứng minh bổ đề 1.

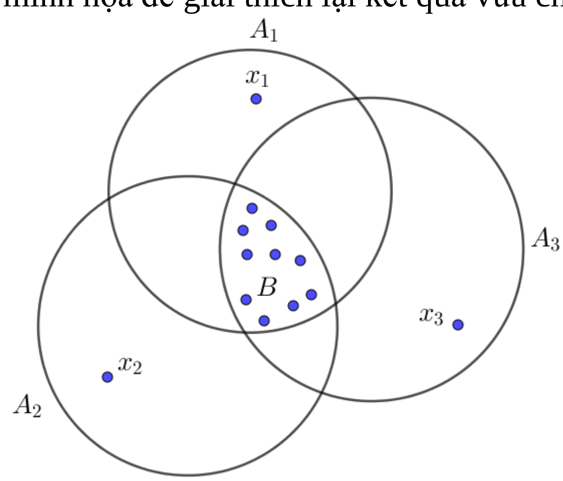
Để chứng minh khẳng định của bổ đề, theo định lý Hall, ta chỉ cần chứng minh $|\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup...\cup\mathcal{B}_m|\geq m$.

Có tổng cộng $k.m$ phần tử trong $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2\cup...\cup\mathcal{B}_m$, do mỗi tập $\mathcal{B}_i$ có k phần tử và mỗi phần tử được tính với số lần xuất hiện trong mỗi tập hợp.

Đặt $e=\{i:B\in\mathcal{B}_i\}=\{i:B\subset A_i\}$.

Do các tập A_i chứa k phần tử phân biệt và $|B|=k-1$ nên $n\geq k-1+|e|$.

Để đơn giản ta sẽ sử dụng hình vẽ minh họa để giải thích lại kết quả vừa chỉ ra ở trên như sau:



(Do tập B có $k-1$ phần tử và $B\subset A_1$ nên A_1 còn chính xác một phần tử $x_1\notin B$, tương tự tập A_2 còn chính xác một phần tử $x_2\notin B$ và tập A_3 còn chính xác một phần tử $x_3\notin B$ vv…Hơn nữa, $x_1\neq x_2$ (nếu không $A_1\equiv A_2$), $x_1\neq x_3$, $x_2\neq x_3$,…, tất cả các phần tử của B và $x_1,x_2,x_3,...$ đều thuộc vào tập $\{1,2,...,n\}$.)

Do $k \ge \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$ nên ta suy ra $|e| \le k$.

Do đó $\left|\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \cup ... \cup \mathcal{B}_m\right| \ge \frac{km}{k} = m$.

Bổ đề được chứng minh. □

Chứng minh định lý Sperncer.

Đặt $k = \max\left\{|A| : A \in S\right\}$, nếu $k \ge \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$, đặt $\left\{A_1, A_2, ..., A_m\right\} = \left\{A \in S : |A| = k\right\}$.

Theo bổ đề 1 vừa chứng minh ở trên, tồn tại các tập phân biệt $\phi\left(A_i\right)(1 \le i \le m)$ sao cho $\phi\left(A_i\right) \subset A_i$ và $\left|\phi\left(A_i\right)\right| = k - 1$.

Khi đó, trong S, nếu ta thực hiện thay thế các tập hợp A_i bởi các tập hợp $\phi\left(A_i\right)(1 \le i \le m)$ tương ứng, chúng ta sẽ nhận được một họ tập Sperncer S' mới sao cho $|S'| = |S|, \forall A \in S' : |A| \le k - 1$.

Cứ tiếp tục quá trình này, chúng ta sẽ nhận được một họ tập Sperncer S^* sao cho $\left|S^*\right| = |S|, \forall A \in S^* : |A| \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Bây giờ đặt $T = \left\{\{1, 2, ..., n\} \setminus A : A \in S^*\right\}$.

Khi đó, T cũng là một họ tập Sperner và $|T| = |S|$, hơn nữa $\forall A \in T \Rightarrow |A| \ge \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Do đó lặp lại quá trình trên cho T và cuối cùng ta nhận được họ tập Sperncer T^* sao cho $\left|T^*\right| = |T| = |S|$ và hơn nữa $\forall A \in T^* \Rightarrow |A| = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Vậy họ tập T^* sẽ chứa những tập hợp có số lượng phần tử bằng $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, do đó $\left|T^*\right| \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Từ đây ta nhận được $|S| \le \binom{n}{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$.

Định lý được chứng minh. □

Tiếp theo ta sẽ trình bày một ứng dụng của định lý Hall vào khảo sát lý thuyết các ma trận song ngẫu nhiên, một đối tượng toán học mang tầm quan trọng to lớn trong các ứng dụng.

Một ma trận vuông được gọi là ***ngẫu nhiên kép*** nếu các phần tử trong ma trận đều không âm và tổng các số trên mỗi hàng và trên mỗi cột bất kỳ đều bằng 1.

Một ma trận ***hoán vị*** là một ma trận vuông thỏa mãn các số trong ma trận hoặc là 0 hoặc là 1 và mỗi dòng hoặc mỗi cột chỉ có duy nhất một số 1.

Một tổ hợp lồi của các vectơ $v_1,...,v_n$ là một tổ hợp tuyến tính $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_n v_n$ sao cho các hệ số α_i là các số không âm và $\alpha_1 + ... + \alpha_n = 1$.

Định lý Birkhoff. Một ma trận ngẫu nhiên kép là tổ hợp lồi của các ma trận hoán vị.

Chứng minh.

Để chuẩn bị cho chứng minh của định lý Birkhoff bằng định lý Hall đầu tiên ta sẽ liên kết ma trận ngẫu nhiên với một đồ thị lưỡng phân như sau: dòng thứ i trong ma trận là một điểm i trong tập X, cột thứ j trong ma trận là một điểm j trong tập Y; điểm i của tập X được nối với điểm j của tập Y nếu phần tử x_{ij} nằm ở dòng thứ i và cột thứ j là số dương.

Tiếp theo ta có một kết quả phụ quan trọng sau:

Bổ đề 2.

Đồ thị lưỡng phân liên kết với ma trận ngẫu nhiên kép có một cặp ghép hoàn hảo.

Chứng minh bổ đề 2.

Ta sẽ chứng minh khẳng định bằng phương pháp phản chứng, giả sử không tồn tại một cặp ghép hoàn hảo.

Khi đó theo định lý Hall, tồn tại một tập con A các đỉnh của X và tập $R(A)$ các đỉnh trong Y (mỗi đỉnh trong $R(A)$ nối với ít nhất một đỉnh trong A) mà $|R(A)| < |A|$.

Bây giờ ta xét tổng $\sum_{i\in A, j\in R(A)} x_{ij}$, nghĩa là tổng của tất cả các số nằm ở giao của một dòng trong A và một cột trong $R(A)$.

● Nếu ta tính theo các dòng trong A thì do tất cả các số khác 0 đều nằm trong cac cột thuộc vào $R(A)$, dựa theo định nghĩa của ma trận liên kết.

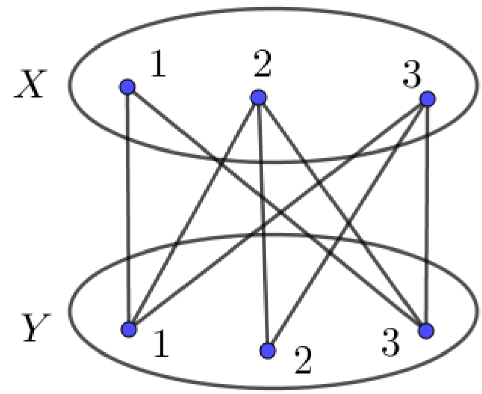
Do đó, $\sum_{i\in A, j\in R(A)} x_{ij} = |A|$, do ma trận là ngẫu nhiên kép nên tổng tất cả các phần tử trong $|A|$ dòng bằng $|A|$.

● Mặt khác, nếu tính theo các cột ta thấy tổng tất cả các phần tử trong các cột thuộc vào $R(A)$

Sau đây ta sẽ minh họa lại thuật toán được sử dụng trong chứng minh của định lý Birkhoff cho ma trận ngẫu nhiên kép

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Đồ thị lưỡng phân liên kết với ma trận M_0 là



Khi đó, $\{(1,3),(2,1),(3,2)\}$ là một cặp ghép hoàn hảo của đồ thị này nên ta gạch chân các số x_{13}, x_{21}, x_{32} như sau:

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{12} & 0 & \underline{\frac{5}{12}} \\ \underline{\frac{1}{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \underline{\frac{1}{2}} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ma trận hoán vị liên kết là $P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ và $\alpha_0 = \frac{1}{6}$.

nhỏ nhất bằng $\sum_{i\in A, j\in R(A)} x_{ij}$, do các số không thuộc các dòng thuộc A là không âm.

Do ma trận là ngẫu nhiên kép nên tổng các số trong các cột thuộc vào $R(A)$ bằng với $|R(A)|$.

Từ đó ta nhận được $\sum_{i\in A, j\in R(A)} x_{ij} \le |R(A)| < |A| = \sum_{i\in A, j\in R(A)} x_{ij}$, vô lý.

<u>Chứng minh định lý Birkhoff.</u>

Ta chứng minh định lý Birkhoff theo các bước sau:

● Ta chứng minh bằng quy nạp theo số lượng các số khác 0 trong ma trận. Gọi M_0 là một ma trận kép ngẫu nhiên. Theo bổ đề 2, đồ thị lưỡng phân liên kết với nó có một cặp ghép hoàn hảo. Gạch dưới tất cả các số liên kết với các cạnh trong ghép cặp đó.

● Bây giờ ta gạch chân chính xác một phần tử trong mỗi dòng và mỗi cột. Gọi α_0 là số bé nhất trong các số được gạch chân và P_0 là ma trận hoán vị mà các số 1 nằm ở vị trí các số được gạch chân.

● Nếu $\alpha_0 = 1$ thì tất cả các số được gạch chân đều bằng 1, theo định nghĩa ma trận kép chứa các số ≤ 1 và α_0 là số nhỏ nhất lại bằng 1.

Khi đó, $M_0 = P_0$ là một ma trận hoán vị.

● Nếu $\alpha_0 < 1$ thì khi đó ma trận $M_0 - \alpha_0 P_0$ là một ma trận có các phần tử không âm, tổng các phần tử trên dòng và trên các cột đều bằng $1-\alpha_0$. Bằng cách chia mỗi số trong ma trận này cho $1-\alpha_0$ trong $M_0 - \alpha_0 P_0$ ta nhận được một ma trận ngẫu nhiên kép M_1.

Khi đó ta có thể viết $M_0 = \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0) M_1$, trong đó M_1 là một ma trận ngẫu nhiên và hơn nữa nó có số các phần tử khác 0 ít hơn hẳn M_0.

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp ta thấy rằng ta có thể biểu diễn lại M_1 dưới dạng $M_1 = \alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n$ với $P_1, P_2, ..., P_n$ là các ma trận hoán vị và $\alpha_1 P_1 + ... + \alpha_n P_n$ là một tổ hợp lồi.

Khi đó

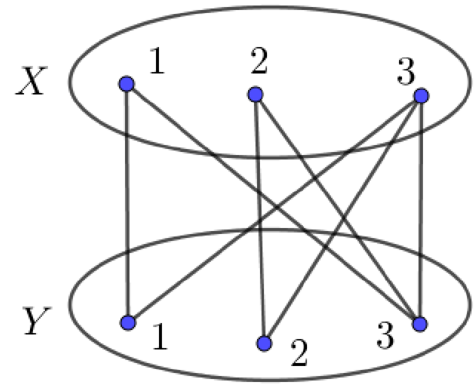
$$M_0 = \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 P_1 + ... + (1-\alpha_0)\alpha_n P_n$$

với $P_0, P_1, P_2, ..., P_n$ là các ma trận hoán vị

Do vậy ta có

$$M_1 = \frac{1}{1-\frac{1}{6}}\left(M_0 - \frac{1}{6}P_0\right) = \begin{pmatrix} \frac{7}{10} & 0 & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{2}{5} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

Đồ thị lưỡng phân liên kết với ma trận M_1 là



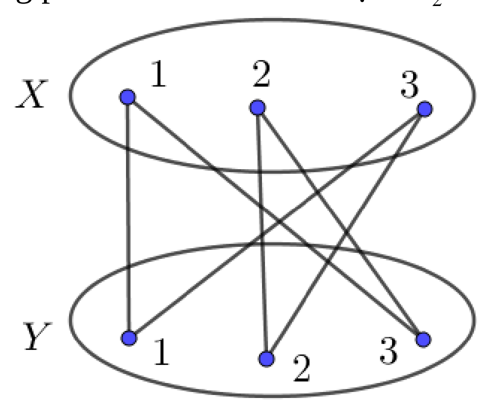
Khi đó, $\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$ là một cặp ghép hoàn hảo của đồ thị này.

Bằng cách lập luận tương tự như trên ta thấy rằng ma trận hoán vị liên kết là $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ và $\alpha_1 = \frac{3}{10}$.

Do vậy ta có

$$M_2 = \frac{1}{1-\frac{3}{10}}\left(M_1 - \frac{3}{10}P_1\right) = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & 0 & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{4}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

Đồ thị lưỡng phân liên kết với ma trận M_2 là



Khi đó, $\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$ là một cặp ghép hoàn hảo của đồ thị này.

Nhận thấy rằng chúng tạo thành một tổ hợp lồi của ma trận M_0, do $\alpha_0 \geq 0, (1-\alpha_0)\alpha_i \geq 0$ và đồng thời

$$\begin{aligned}&\alpha_0 + (1-\alpha_0)\alpha_1 + ... + (1-\alpha_0)\alpha_n \\ &= \alpha_0 + (1-\alpha_0)(\alpha_1 + ... + \alpha_n) \\ &= \alpha_0 + 1 - \alpha_0 \\ &= 1\end{aligned}$$

Lập luận tương tự như trên ta thấy rằng ma trận hoán vị liên kết là $P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ và $\alpha_2 = \dfrac{3}{7}$.

Do đó ta nhận được

$$M_3 = \frac{1}{1-\frac{3}{7}}\left(M_2 - \frac{3}{7}P_2\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Do vậy $M_3 = P_3$ là một ma trận hoán vị.

Đảo ngược lại các tính toán ở trên ta nhận được

$$\begin{aligned}M_2 &= \alpha_2 P_2 + (1-\alpha_2) M_3 \\ &= \frac{3}{7}P_2 + \frac{4}{7}P_3 \\ M_1 &= \alpha_1 P_1 + (1-\alpha_1) M_2 \\ &= \frac{3}{10}P_1 + \frac{7}{10}\left(\frac{3}{7}P_2 + \frac{4}{7}P_3\right) \\ &= \frac{3}{10}P_1 + \frac{3}{10}P_2 + \frac{4}{10}P_3 \\ M_0 &= \alpha_0 P_0 + (1-\alpha_0) M_1 \\ &= \frac{1}{6}P_0 + \frac{5}{6}\left(\frac{3}{10}P_1 + \frac{3}{10}P_2 + \frac{4}{10}P_3\right) \\ &= \frac{1}{6}P_0 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{3}P_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{M_0 = \frac{1}{6}P_0 + \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{3}P_3}$$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trần Minh Hiền, Định lý Hall và ứng dụng, ??/??/????

[2]. Trương Phước Nhân, SDR, 19/12/2018.

[3]. Trương Phước Nhân, Transversal, 12/07/2018.

[4]. Trương Phước Nhân, Định lý Hall-Định lý Konig, 24/07/2017.

[5]. Trương Phước Nhân, Định lý Sperncer, 02/08/2017.

[6]. Trương Phước Nhân, Định lý Konig-Egervary, 05/08/2017.

[7]. Trương Phước Nhân, Định lý Van der Waerden, 08/05/2018.