Ứng dụng lý thuyết hàm phức trong các bài toán đại số tuyến tính

Trương Phước Nhân, 13/01/2019

Nội dung của bài viết bàn về cách ứng dụng các kết quả và kỹ thuật của lý thuyết hàm phức chứng minh lại các kết quả quan trọng bậc nhất trong đại số tuyến tính như: định lý phân tích chuẩn của Jordan, định lý Cayley-Hamilton,… Mặc dù các kết quả này có thể được chứng minh bằng các kỹ thuật thuần túy đại số nhưng việc tiếp cận các chủ đề này dựa trên các công cụ và kỹ thuật giải tích sẽ giúp ta có được nhiều góc nhìn mới và mở rộng các kết quả này cho các trường hợp tổng quát hơn.

1. Kiến thức cơ bản

Giả sử V là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{C}$ và toán tử tuyến tính $A:V\to V$.

Nhận xét rằng, bằng cách xét các vector tương ứng bởi tọa độ của chúng trên một cơ sở nào đó của không gian V, ta có thể xem $V=\mathbb{C}^n$ được trang bị chuẩn học hình Euclidean và A là một ma trận cấp $n\times n$ với các phần tử thuộc trường $\mathbb{C}$.

Để chứng minh các kết quả quan trọng về đại số tuyến tính mà ta nêu ở đầu bài viết một điều tất yếu là ta cần khảo sát cấu trúc của giải thức $\lambda\mapsto(\lambda I-A)^{-1}$.

Đầu tiên để đơn giản hóa vấn đề ta xét bài toán trong trường hợp $n=1$.

Khi đó, $A=a$, $I=1$, giải thức tương ứng là $(\lambda-a)^{-1}$.

Để khảo sát cấu trúc của giải thức $\lambda\mapsto(\lambda-a)^{-1}$ ta xem xét khai triển Laurent của giải thức xung quanh điểm $\lambda_0\neq a$, ta thu được

$$(\lambda-a)^{-1}=\frac{1}{\lambda-a}=\frac{1}{(\lambda-\lambda_0)+(\lambda_0-a)}=\frac{(\lambda_0-a)^{-1}}{1+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0-a)^{-1}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda_0-a)^{-(k+1)}(\lambda-\lambda_0)^k,$$

trong đó $\left|(\lambda_0-a)^{-1}(\lambda-\lambda_0)\right|<1$.

Từ kết quả vừa thu được ta nhận thấy rằng giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$ có thể được xác định dựa trên phương pháp giải tích nếu ta đưa cấu trúc chuẩn vào không gian một V cách thích hợp. Do V là một không gian hữu hạn chiều nên không gian các toán tử trên không gian V cũng hữu hạn chiều và về mặt lý thuyết tất cả các cấu trúc chuẩn đều tương đương với nhau nên để thuận tiện ta sẽ xét vấn đề dựa trên chuẩn toán tử như sau:

Giả sử V là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{C}$ và $A:V\to V$ là một toán tử tuyến tính.

Khi đó, ta định nghĩa chuẩn của toán tử A bởi hệ thức $\|A\|:=\sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$, dễ dàng kiểm chứng lại được các tính chất cơ bản của cấu trúc chuẩn nên ta loại bỏ chứng minh tầm thường cho việc này trong bài viết.

Để tiếp cận bài toán khảo sát trong trường hợp tổng quát ta sẽ dựa trên phương pháp mà đã sử dụng cho trường hợp riêng $n=1$, tức là ta sẽ biểu diễn lại giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$ dưới dạng một chuỗi toán tử.

Cơ sở của cách làm này dựa trên công cụ chuỗi Neumann trong lý thuyết toán tử.

Kết quả 1. (Neumann)

Giả sử V là một không gian định chuẩn trên trường $\mathbb{C}$, $B:V\to V$ là một toán tử tuyến tính và $r:=\limsup\limits_{n\to\infty}\|B^n\|^{\frac{1}{n}}$.

Khi đó, chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty}B^k$ hội tụ nếu $r<1$ và phân kì nếu $r>1$. Hơn nữa, $r\le\|B\|$.

Nếu chuỗi $\sum\limits_{k=0}^{\infty}B^k$ hội tụ thì $(I-B)^{-1}$ tồn tại và $(I-B)^{-1}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}B^k$.

Chứng minh kết quả 1.

Do phép chứng minh chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ hội tụ nếu $r<1$ và phân kì nếu $r>1$ là tầm thường nên trong bài viết này ta sẽ không nhắc tới nó.

Nhận xét rằng $(I-B)\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)(I-B)=\sum_{k=0}^{n} B^k-\sum_{k=0}^{n} B^{k+1}=I-B^{n+1}$.

Do đó, nếu chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} B^k$ thì $B^{n+1}\to 0$ nên, bằng cách chuyển qua giới hạn khi $n\to\infty$, ta nhận được

$$(I-B)\left(\sum_{k=0} B^k\right)=\left(\sum_{k=0}^{n} B^k\right)(I-B)=I.$$

Như vậy, $(I-B)^{-1}$ tồn tại và $(I-B)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty} B^k$.

Hơn nữa, do $\|B^n\|\le\|B\|^n$ nên $r\le\|B\|$.

Nhận xét rằng từ phân tích cho trường hợp riêng $n=1$, ta nhận thấy rằng bản thân giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$ không phải lúc nào cũng tồn tại nên rất cần thiết việc thu hẹp phạm vi khảo sát của giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$.

Đặt $\rho(A)=\left\{\lambda\in\mathbb{C}:(\lambda I-A)^{-1} \text{ tồn tại}\right\}$ là giải tập và $\sigma(A)=\mathbb{C}\setminus\rho(A)$ là phổ của toán tử A.

Bằng cách thay $\lambda-a$ bởi $\lambda I-A$, giá trị tuyệt đối $|\cdot|$ bởi chuẩn toán tử $\|\cdot\|$, ta thu được kết quả

Kết quả 2.
Giả sử V là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{C}$ và toán tử tuyến tính $A:V\to V$.
Khi đó, giải tập $\rho(A)$ là một tập mở và giải thức $\lambda\mapsto(\lambda I-A)^{-1}$ giải tích trên tập $\rho(A)$.
Hơn nữa, nếu $\lambda_0\in\rho(A)$ thì $(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda_0 I-A)^{-(k+1)}(\lambda-\lambda_0)^k$ nếu $|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|}$.

Chứng minh kết quả 2.
Nhận xét rằng kết quả 2) có dạng phát biểu tương tự như kết quả phân tích trong trường hợp riêng $n=1$ nên ta sẽ áp dụng lại các lập luận bằng cách thay a bởi A. Điểm cốt lõi trong lập luận còn thiếu là chỉ ra rằng $(\lambda I-A)^{-1}$ tồn tại với các giá trị λ đủ gần λ_0.

Do $\lambda I-A=(\lambda_0 I-A)+(\lambda-\lambda_0)I=\underbrace{\left(I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}\right)}_{I-B}(\lambda_0 I-A)$, $B:=-(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}$, nên để chứng minh sự tồn tại của giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$ ta cần chỉ ra sự tồn tại của toán tử $(I-B)^{-1}$.

Nhận thấy rằng $\left\|(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|=|\lambda-\lambda_0|\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|<1$, nếu $|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|}$.

Do đó, bằng cách áp dụng kết quả 1), $\left(I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}\right)^{-1}$ tồn tại nên giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$ tồn tại với λ đủ gần λ_0, cụ thể là $|\lambda-\lambda_0|<\dfrac{1}{\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|}$.

Hơn nữa, $\left(I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda_0 I-A)^{-k}(\lambda-\lambda_0)^k$, nên

$$(\lambda I-A)^{-1}=(\lambda_0 I-A)^{-1}\left(I+(\lambda-\lambda_0)(\lambda_0 I-A)^{-1}\right)^{-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda_0 I-A)^{-(k+1)}(\lambda-\lambda_0)^k.$$

$$\Rightarrow (\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\lambda_0 I-A)^{-(k+1)}(\lambda-\lambda_0)^k,\ |\lambda-\lambda_0|<\frac{1}{\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|}.$$

Do đó, nếu $\lambda_0\in\rho(A)$ thì $(\lambda I-A)^{-1}$ có thể biểu diễn thành chuỗi lũy thừa xung quanh điểm λ_0 với bán kính hội tụ $\le\frac{1}{\left\|(\lambda_0 I-A)^{-1}\right\|}$, nên $(\lambda I-A)^{-1}$ là hàm giải tích theo $\lambda\in\rho(A)$ và từ lập luận này ta cũng suy ra được rằng $\rho(A)$ là tập mở.

Nhận xét rằng đối với một ma trận hữu hạn A, phổ $\sigma(A)$ chỉ bao gồm các giá trị riêng, bởi vì từ định lý số chiều hạt nhân ta dễ dàng suy ra được rằng $(\lambda I-A)^{-1}$ tồn tại khi và chỉ khi $\operatorname{Ker}(\lambda I-A)=\{0\}$. Do một ma trận chỉ có hữu hạn các giá trị riêng nên chúng đồng thời là các điểm bất thường cô lập của giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$.

Đặt $\operatorname{spec}(A):=\sup\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$ là bán kính phổ của toán tử A.

Kết quả 3.

Nếu A là toán tử tuyến tính trên một không gian vectơ hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{C}$ thì $\sigma(A)\neq 0$.

Hơn nữa, $\operatorname{spec}(A)=\limsup_{n\to\infty}\left\|A^n\right\|^{\frac{1}{n}}$ và $(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$.

Chứng minh kết quả 3.

Đặt $r=\limsup_{n\to\infty}\left\|A^n\right\|^{\frac{1}{n}}$ và nhận xét rằng $\limsup_{n\to\infty}\left\|\frac{A^n}{\lambda^n}\right\|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{|\lambda|}\limsup_{n\to\infty}\left\|A^n\right\|^{\frac{1}{n}}=\frac{r}{|\lambda|}$.

Bằng cách áp dụng kết quả 1) ta nhận thấy rằng $(\lambda I-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$ và chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^k}$ hội tụ khi và chỉ khi $|\lambda|>r$.

Do đó, nếu $|\lambda|>r$ thì $\lambda\in\rho(A)$ và khai triển Laurent của giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$ tại điểm 0 có dạng

$$(\lambda I-A)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{\lambda^{k+1}}$$

Từ khai triển Laurent vừa thu được ở trên ta nhận thấy rằng $\sigma(A)=\phi$ hoặc $\exists\lambda_0\in\sigma(A):|\lambda_0|=r$.

Do đó, $|\lambda_0|=r$ nếu $\sigma(A)\neq\varnothing$.

Phần việc còn lại của ta là chứng minh rằng $\sigma(A)\neq\varnothing$.

Do $r \le \|A\|$ nên $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \le \frac{1}{|\lambda|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\|A\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda|}\frac{1}{1-\|A\||\lambda|^{-1}} = \frac{1}{|\lambda|-\|A\|}$ với mọi $\lambda \in \mathbb{C}$ thỏa mãn $|\lambda| > \|A\|$.

Giả sử phản chứng $\rho(A) = \mathbb{C}$.

Khi đó, $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ giải tích trên $\mathbb{C}$.

Bằng cách áp dụng công thức tích phân Cauchy ta thu được

$$A^{-1} = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=R}\frac{(\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda}{\lambda}, \text{ với mọi } R > 0.$$

Suy ra, $\left\|A^{-1}\right\| \le \frac{2\pi R}{2\pi}\sup_{|\lambda|\ge R}\frac{\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|}{R} \le \frac{1}{R-\|A\|}$, với mọi $R > \|A\|$.

Bằng cách chuyển qua giới hạn khi $R \to \infty$ ta nhận được $\left\|A^{-1}\right\| = 0$, vô lí.

Do đó, $\sigma(A) \ne \varnothing$.

2. Khai triển Laurent tại các giá trị riêng

Trong các phân tích trên ta đã biết rằng các giá trị riêng của ma trận A đóng vai trò như các điểm bất thường cô lập của giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$. Điểm cốt lõi trong các phân tích của ta nằm ở vấn đề tìm khai triển Laurent của giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$ xung quanh giá trị riêng $\lambda_0 \in \sigma(A)$.

Kết quả 4.

Giả sử $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Khi đó, $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{N_0^k}{(\lambda-\lambda_0)^{k+1}} + \frac{P_0}{\lambda-\lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k B_0^{k+1}(\lambda-\lambda_0)^k$, λ đủ gần λ_0, trong đó P_0, N_0 và B_0 là các toán tử thỏa mãn các điều kiện:

i) $P_0^2 = P_0$, nghĩa là P_0 là một phép chiếu;

ii) $N_0 P_0 = N_0 P_0 = N_0$;

iii) $B_0 P_0 = P_0 B_0 = 0$;

iv) $\operatorname{spec}(N_0) = 0$;

v) $AP_0 = P_0 A = \lambda_0 P_0 + N_0$;

vi) $(\lambda_0 I - A)B_0 = B_0(\lambda_0 I - A) = I - P_0$.

Đầu tiên trước khi đi vào trình bày phép chứng minh khẳng định vừa nêu ta cần đến một số kết quả cơ bản liên quan đến giải thức.

Bổ đề 1.

Nếu tồn tại các giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$ và $(\mu I - A)^{-1}$ thì

i) $A(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} A = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I$;

ii) $(\mu I - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}$;

iii) $(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} = (\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}$.

Chứng minh bổ đề 1.

i) $A(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - (\lambda I - A))(\lambda I - A)^{-1} = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I$;

$(\lambda I - A)^{-1} A = (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - (\lambda I - A)) = \lambda(\lambda I - A)^{-1} - I$.

ii) $(\mu I - A)\left((\mu I - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1}\right)(\lambda I - A) = (\lambda I - A) - (\mu I - A) = (\lambda - \mu) I$.

Bằng cách thực hiện nhân trái cho $(\mu I - A)^{-1}$ và nhân phải cho $(\lambda I - A)^{-1}$, ta nhận được kết quả

$$(\mu I - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1} = (\lambda - \mu)(\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}.$$

iii) Bằng cách hoán đổi vai trò của μ và λ, ta được

$$(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}.$$

Do đó, $(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1} = (\mu I - A)^{-1}(\lambda I - A)^{-1}$.

Giả sử rằng khai triển Laurent của giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$ tại điểm $\lambda_0 \in \sigma(A)$ có dạng

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_n (\lambda - \lambda_0)^n,$$

trong đó $B_n = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\Gamma(\lambda_0, r)} \dfrac{(\lambda I - A)^{-1}}{(\lambda - \lambda_0)^{n+1}} d\lambda$, $\Gamma(\lambda_0, r) = \{\lambda : |\lambda - \lambda_0| = r\}$ sao cho trong hình tròn $\overline{\Gamma(\lambda_0, r)}$ chỉ chứa duy nhất giá trị riêng λ_0.

Bằng cách áp dụng bổ đề 1, ta rút ra một số hệ thức truy hồi trên các hệ số B_n

Bổ đề 2.

$$B_m B_n = B_n B_m = \begin{cases} -B_{n+m+1}, & n, m \ge 0, \\ B_{n+m+1}, & n, m < 0, \\ 0, & \text{trong các trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

Hơn nữa, $AB_n = B_n A = \begin{cases} B_{n-1} + \lambda_0 B_n, & n \neq 0, \\ B_{n-1} + \lambda_0 B_n - I, & n = 0. \end{cases}$

Chứng minh bổ đề 2.

Không mất tính tổng quát, bằng cách thay toán tử A bởi toán tử $\lambda_0 I - A$, ta có thể giả sử rằng $\lambda_0 = 0$.

Gọi $\Gamma(r)$ và $\Gamma(s)$ lần lượt là các đường tròn tâm tại điểm 0 với bán kính r và s, $0 < r < s$ sao cho trong hình tròn $\overline{\Gamma(s)}$ chỉ chứa duy nhất giá trị riêng 0.

Khi đó,

$$(2\pi i)^2 B_n B_m = \left(\oint\limits_{\Gamma(r)} \frac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^{n+1}} d\lambda \right) \left(\oint\limits_{\Gamma(s)} \frac{(\mu I - A)^{-1}}{\mu^{m+1}} d\mu \right)$$

$$= \oint\limits_{\Gamma(r)} \oint\limits_{\Gamma(s)} \frac{(\lambda I - A)^{-1}(\mu I - A)^{-1}}{\lambda^{n+1}\mu^{m+1}} d\lambda d\mu$$

Bằng cách sử dụng hệ thức ii) trong bổ đề 1, ta nhận được kết quả

$$(2\pi i)^2 B_n B_m = \oint\limits_{\Gamma(r)} \oint\limits_{\Gamma(s)} \frac{(\mu I - A)^{-1} - (\lambda I - A)^{-1}}{(\lambda - \mu)\lambda^{n+1}\mu^{m+1}} d\lambda d\mu$$

$$= \oint_{\Gamma(s)} \frac{(\mu I - A)^{-1}}{\mu^{m+1}} \oint_{\Gamma(r)} \frac{1}{\lambda^{n+1}(\lambda-\mu)} d\lambda d\mu - \oint_{\Gamma(r)} \frac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^{n+1}} \oint_{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu^{m+1}(\lambda-\mu)} d\mu d\lambda$$

Nhận xét rằng $\frac{1}{\lambda^{n+1}(\lambda-\mu)} = \frac{\lambda^{n+1} - (\lambda^{n+1} - \mu^{n+1})}{\lambda^{n+1}\mu^{n+1}(\lambda-\mu)} = \frac{1}{\mu^{n+1}(\lambda-\mu)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{n-k+1}} \frac{1}{\mu^{k+1}}$, $n \geq 0$.

Do $\mu \in \Gamma(s)$ nằm ngoài đường tròn $\Gamma(r)$ nên, bằng cách áp dụng hệ thức khai triển $\frac{1}{\lambda^{n+1}(\lambda-\mu)} = \frac{1}{\mu^{n+1}(\lambda-\mu)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\lambda^{n-k+1}} \frac{1}{\mu^{k+1}}$ trong trường hợp $n \geq 0$ và định lý tích phân Cauchy trong trường hợp $n < 0$, ta nhận được kết quả

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(r)} \frac{1}{\lambda^{n+1}(\lambda-\mu)} d\lambda = \begin{cases} -\frac{1}{\mu^{n+1}}, n \geq 0, \\ \quad 0 \quad, n < 0. \end{cases}$$

Để tính tích phân $\oint_{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu^{m+1}(\lambda-\mu)} d\mu$ ta áp dụng lối lập luận tương tự:

Nhận xét rằng $\frac{1}{\mu^{m+1}(\lambda-\mu)} = \frac{1}{\lambda^{m+1}(\lambda-\mu)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\mu^{m-k+1}} \frac{1}{\lambda^{k+1}}$, $m \geq 0$.

Nếu $m \geq 0$ thì cả $\mu = 0$ và $\mu = \lambda$ đều là các điểm bất thường nằm trong hình tròn $\Gamma(s)$.

Do đó, bằng cách sử dụng hệ thức $\frac{1}{\mu^{m+1}(\lambda-\mu)} = \frac{1}{\lambda^{m+1}(\lambda-\mu)} + \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{\mu^{m-k+1}} \frac{1}{\lambda^{k+1}}$ và định lý thặng dư, ta nhận được

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu^{m+1}(\mu-\lambda)} d\mu = \frac{1}{\lambda^{m+1}} - \frac{1}{\lambda^{m+1}} = 0.$$

Nếu $m < 0$ thì chỉ có duy nhất $\mu = \lambda$ là điểm bất thường nằm trong hình tròn $\Gamma(s)$.

Do đó, bằng cách sử dụng định lý tích phân Cauchy, ta thu được

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(s)} \frac{1}{\mu^{m+1}(\mu-\lambda)} d\mu = \frac{1}{\lambda^{m+1}}.$$

Bằng cách tổng hợp các kết quả thu được ở trên ta nhận thấy rằng:

Nếu $m, n \geq 0$ thì tích phân con trong tích phân lặp thứ hai ở vế trái bằng 0 còn tích phân còn lại bằng $2\pi i \mu^{-(n+1)}$. Do đó, $B_n B_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(s)} \frac{(\mu I - A)^{-1}}{\mu^{m+n+2}} d\mu = B_{n+m+1}$.

Nếu $m, n < 0$ thì tích phân con trong tích phân lặp thứ nhất ở vế trái bằng 0 còn tích phân còn lại bằng $2\pi i \lambda^{-(m+1)}$. Do đó, $B_n B_m = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(r)} \frac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^{m+n+2}} d\lambda = -B_{n+m+1}$.

Nếu $n \geq 0, m < 0$ hoặc $n < 0, m \geq 0$, bằng phương pháp lập luận tương tự, thì $B_n B_m = 0$, nên $B_n B_m = B_m B_n = 0$.

Phần việc còn lại của ta là chứng minh $AB_n = B_n A = \begin{cases} B_{n-1} + \lambda_0 B_n, & n \neq 0, \\ B_{n-1} + \lambda_0 B_n - I, & n = 0. \end{cases}$

Nhận thấy rằng

$$AB_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r)} \frac{A(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^{n+1}} d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r)} \frac{\lambda(\lambda I - A)^{-1} - I}{\lambda^{n+1}} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r)} \frac{(\lambda I - A)^{-1}}{\lambda^{n}} d\lambda - \frac{I}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r)} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda = B_{n-1} - -\frac{I}{2\pi i}\oint_{\Gamma(r)} \frac{1}{\lambda^{n+1}} d\lambda .$$

Nhận xét rằng nếu $n \neq 0$ thì tích phân sau cùng bằng 0 và bằng $2\pi i$ nếu $n = 0$.
Điều này kết thúc phép chứng minh bổ đề 2.

Chứng minh kết quả 4.

Nhận xét rằng từ bổ đề 2 ta có thể biểu diễn tất cả các hệ số theo 3 hệ số cơ bản B_{-2}, B_{-1} và B_0.

Đặt $P_0 := B_{-1}$, $N_0 := B_{-2}$.

Khi đó, $P_0^2 = B_{-1}B_{-1} = B_{-1-1+1} = B_{-1} = P_0$, điều này kết thúc phép chứng minh i).

Đồng thời ta cũng nhận thấy

$$P_0N_0 = B_{-1}B_{-2} = B_{-1-2+1} = B_{-2} = N_0 .$$

Do B_{-1} và B_{-2} giao hoán nên $P_0N_0 = N_0P_0 = N_0$.

Điều này kết thúc phép chứng minh ii).

Bằng cách lập luận tương tự như trên ta cũng suy ra được rằng

$$P_0B_0 = B_{-1}B_0 = 0 = B_0B_{-1} = B_0P_0 .$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh quy nạp rằng $B_n = (-1)^n B_0^{n+1}$, $n \geq 0$.

Khẳng định là hiển nhiên với $n = 0$.

Giả sử khẳng định đúng với $n = k$, tức là $B_k = (-1)^k B_0^{k+1}$.

Khi đó, $B_{n+1} = B_{n+0+1} = -B_nB_0 = -(-1)^n B_0^{n+1}B_0 = (-1)^{n+1} B_0^{(n+1)+1}$.

Do đó, theo nguyên lý quy nạp toán học, $B_n = (-1)^n B_0^{n+1}$, $n \geq 0$.

Bằng phương pháp lập luận tương tự ta cũng nhận thấy rằng $B_{-n} = B_{-2}^{n-1} = N_0^{n-1}$, $n \geq 2$.

Thật vậy, khẳng định trên là hiển nhiên với $n = 2$ và

$$B_{-(n+1)} = B_{-n-2+1} = B_{-n}B_{-2} = B_{-2}^{n-1}B_{-2} = B_{-2}^{(n+1)-1} = N_0^{(n+1)-1} .$$

Bằng cách kết hợp các phân tích trên ta nhận thấy rằng

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_0^k}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} + \frac{P_0}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_0^{k+1} (\lambda - \lambda_0)^k, \ \lambda \text{ đủ gần } \lambda_0 .$$

Do $B_{-(n+1)} = N_0^n$ nên $\left\|N_0^n\right\| = \left\|B_{-(n+1)}\right\| \leq r^{n+1} \sup_{|\lambda|=r} \left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq Kr^{n+1}$ với $K > 0$ phụ thuộc bởi r.

Nhận xét rằng chặn K là hữu hạn bởi vì đường tròn $|\lambda| = r$ là tập compact và giải thức $\lambda \mapsto (\lambda I - A)^{-1}$ là hàm liên tục. Do đó, $\operatorname{spec}(N_0) \leq r \lim_{n\to\infty} (Kr^n)^{\frac{1}{n}} = r$.

Do ta có thể chọn r tùy ý nên, bằng cách chuyển qua giới hạn khi $r \to \infty$, $\operatorname{spec}(N_0) = 0$.

Nhận xét rằng các hệ thức (v) và (vi) là các trường hợp riêng của $AB_n = B_nA = \begin{cases} B_{n-1} + \lambda_0 B_n, & n \neq 0, \\ B_{n-1} + \lambda_0 B_n - I, & n = 0, \end{cases}$ khi $n = -1$ và $n = 0$.

Tiếp theo, ta sẽ chỉ ra rằng toán tử N_0 là lũy linh.

Thật vậy, từ hệ thức ii) của kết quả 4 ta suy ra rằng $\mathrm{Im}(N_0) \subseteq \mathrm{Im}(P_0)$, nên tồn tại số tự nhiên nhỏ nhất $n_0 \le m_0 := \dim(\mathrm{Im}(P_0)) \le \dim V < +\infty$ sao cho

$$\mathrm{Ker}(P_0) \subset \mathrm{Ker}(N_0) \subset \mathrm{Ker}(N_0^2) \subset ... \subset \mathrm{Ker}(N_0^{n_0}) = \mathrm{Ker}(N_0^{n_0+1}) = ...$$

Nếu ta chứng minh được rằng $N_0^{n_0} = 0$ và $N_0^{n_0-1} \ne 0$ thì n_0 chính là bậc của giá trị riêng λ_0, theo nghĩa bậc của cực điểm, của giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$ và toán tử $N_0 : \mathrm{Im}(N_0^{n_0}) \to \mathrm{Im}(N_0^{n_0})$ khả nghịch.

Để chứng minh $N_0^{n_0} = 0$ ta lưu ý rằng từ hệ thức iv) của kết quả 4 nên 0 là giá trị riêng duy nhất của toán tử N_0.

Từ dãy bao hàm thức ta cũng suy ra được rằng $\{P_0, N_0, N_0^2, ..., N_0^{n_0-1}\}$ là độc lập tuyến tính nên $N_0^{n_0-1} \ne 0$.

Hơn nữa, do P_0 là toán tử chiếu nên ta có phân tích $V = \mathrm{Im}(P_0) \oplus \mathrm{Ker}(P_0)$.

Bằng cách chọn các cơ sở của $\mathrm{Im}(P_0)$ và $\mathrm{Ker}(P_0)$ làm cơ sở của không gian vector V, ta có thể biểu diễn toán tử P_0 lại dưới dạng ma trận khối $P_0 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Tương tự như vậy từ hệ thức ii) và v) của kết quả 4 ta cũng suy ra rằng trong hệ cơ sở vừa chọn các toán tử N_0 và A có thể biểu diễn lại dưới dạng khối lần lượt là

$$N_0 = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } A = \begin{bmatrix} \lambda_0 I + N & 0 \\ 0 & A_0 \end{bmatrix}.$$

Do đó, $A\big|_{\mathrm{Ker}(P_0)} = A_0$ và từ hệ thức vi) ta suy ra $\lambda_0 \in \rho(A_0)$ với $A\big|_{\mathrm{Ker}(P_0)} = (\lambda_0 I - A_0)^{-1}$.

Tuy nhiên, từ hệ thức iii) ta nhận thấy rằng $B_0\big|_{\mathrm{Im}(P_0)} = 0$, nên toán tử B_0 có dạng $B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (\lambda_0 I - A_0)^{-1} \end{bmatrix}$

Do đó, phần chính của chuỗi Laurent $(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_0^k}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}} + \frac{P_0}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k B_0^{k+1} (\lambda - \lambda_0)^k$

đồng nhất với $(\lambda I - A_0)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_0 I - A_0)^{-(k+1)} (\lambda - \lambda_0)^k$, do $\lambda_0 \in \rho(A_0)$.

Hơn nữa, phần bất thường của khai triển Laurent triệt tiêu trên $\mathrm{Ker}(P_0)$ và phần chính của khai triển triệt tiêu trên $\mathrm{Im}(P_0)$ nên phần bất thường và phần chính là các toán tử ổn định trên các không gian con bù nhau.

Do đó ta có kết quả sau

Kết quả 5.

Giả sử λ_0 là một giá trị riêng của toán tử A và P_0, N_0, B_0 là các toán tử được định nghĩa như trong kết quả 4.

Khi đó, nếu $m_0 := \dim(\mathrm{Im}(P_0))$ thì

$$P_0(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} P_0 = \frac{P_0}{\lambda - \lambda_0} + \sum_{k=1}^{m_0} \frac{N_0^k}{(\lambda - \lambda_0)^{k+1}}$$

là phần bất thường của khai triển Laurent của giải thức $(\lambda I - A)^{-1}$ tại điểm $\lambda = \lambda_0$.

Hơn nữa,

$$\left(I-P_0\right)\left(\lambda I-A\right)^{-1}=\left(\lambda I-A\right)^{-1}\left(I-P_0\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(-1\right)^k B_0^{k+1}\left(\lambda-\lambda_0\right)^k$$

là phần chính của khai triển Laurent của giải thức $\left(\lambda I-A\right)^{-1}$ tại điểm $\lambda=\lambda_0$.

Hơn nữa,

i) $V=\operatorname{Im}\left(P_0\right)\oplus\operatorname{Ker}\left(P_0\right)$

ii) λ_0 là giá trị riêng duy nhất của toán tử $A:\operatorname{Im}\left(P_0\right)\to\operatorname{Im}\left(P_0\right)$;

iii) Toán tử $\lambda_0 I-A:\operatorname{Ker}\left(P_0\right)\to\operatorname{Ker}\left(P_0\right)$ khả nghịch.

Nhận xét rằng từ hệ thức v) ta thu lại được định lý phân tích Dunford / định lý phân tích Jordan – Chevalley từ khai triển Laurent tại điểm $\lambda=\lambda_0$ bởi vì $\lambda_0 P_0$ là toán tử chéo trên $\operatorname{Im}\left(P_0\right)$ và N_0 là toán tử lũy linh.

Kết quả 6.

Giả sử $A=D+N$ trong đó D, N là các toán tử thỏa mãn $DN=ND$ và $\operatorname{spec}\left(N\right)=0$.

Khi đó, $\rho\left(A\right)=\rho\left(D\right)$ và chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty}N^k\left(\lambda I-D\right)^{-(k+1)}$ hội tụ đều về $\left(\lambda I-A\right)^{-1}$ trên tập con compact bất kì của giải tập $\rho\left(A\right)$.

Hơn nữa, nếu $\lambda_0\in\sigma\left(A\right)$ thì $P_0=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(\lambda_0,r)}\left(\lambda I-A\right)^{-1}d\lambda=\dfrac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(\lambda_0,r)}\left(\lambda I-D\right)^{-1}d\lambda$

sao cho đường tròn $\Gamma\left(\lambda_0,r\right)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda_0\right|=r\right\}$ không chứa bất kì giá trị riêng nào khác của toán tử A.

Chứng minh kết quả 6.

Nếu $\lambda\in\rho\left(D\right)$ thì $\lambda I-A=\lambda I-D-N=\left(\lambda I-D\right)\left(I-\left(\lambda I-D\right)^{-1}N\right)$.

Từ giả thiết bài toán ta suy ra $\left(\lambda I-D\right)N=N\left(\lambda I-D\right)$.

Bằng cách nhân trái và nhân phải cả hai vế cho $\left(\lambda I-D\right)^{-1}$ ta nhận được

$$N\left(\lambda I-D\right)^{-1}=\left(\lambda I-D\right)^{-1}N,$$

nên $\left(N\left(\lambda I-D\right)^{-1}\right)^n=N^n\left(\lambda I-D\right)^{-n}$, với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Do đó, nếu $K\subseteq\rho\left(D\right)$ là một tập con compact thì ta luôn tìm được số $M>0$ sao cho

$$\left\|\left(N\left(\lambda I-D\right)^{-1}\right)^n\right\|^{\frac{1}{n}}\le\left\|N^n\right\|^{\frac{1}{n}}\left\|\left(\lambda I-D\right)^{-1}\right\|\le M\left\|N^n\right\|^{\frac{1}{n}} \text{ với mọi } n\in\mathbb{N},\ \lambda\in K.$$

Do $\operatorname{spec}\left(N\right)=0$ nên $\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}$ sao cho nếu $n>n_0$ thì $\left\|\left(N\left(\lambda I-D\right)^{-1}\right)^n\right\|^{\frac{1}{n}}\le M\left\|N^n\right\|^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$, với mọi $\lambda\in K$.

Do đó, $\operatorname{spec}\left(N\left(\lambda I-D\right)^{-1}\right)=0$, bằng cách chuyển qua giới hạn khi cho $\varepsilon\to 0$.

Từ kết quả 1 ta có thể lấy nghịch đảo hệ thức ở phần đầu của phân tích để thu được

$$\left(\lambda I-A\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}N^k\left(\lambda I-D\right)^{-(k+1)} \text{ và } \lambda\in\rho\left(A\right).$$

Từ đánh giá trên ta cũng suy ra được tính hội tụ đều của chuỗi trên tập con compact K.

Nếu $\lambda \in \rho(A)$ thì $D = A - N$ có cùng cấu trúc phổ với $AN = NA$, nên ta có thể hoán đổi vai trò của D và A và suy ra được rằng $\lambda \in \rho(D)$. Điều này chứng minh rằng $\rho(A) = \rho(D)$.

Hơn nữa, nếu $\lambda_0 \in \sigma(A)$ thì ,từ tính hội tụ đều của chuỗi toán tử trên tập con compact $\Gamma(r)$, ta thu được

$$P_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma(r)} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} N^k \oint_{\Gamma(r)} (\lambda I - D)^{-(k+1)} d\lambda .$$

Từ khai triển Taylor trong kết quả 2) ta suy ra $\frac{d^k}{d\lambda^k}(\lambda I - D)^{-1} = k!(\lambda I - D)^{-(k+1)}$, nên $\frac{1}{k}(\lambda I - D)^{-k}$ là nguyên hàm của $(\lambda I - D)^{-(k+1)}$ trên $\rho(A)$ với mọi $k \geq 1$.

Do đó, tất cả các tích phân trong vế phải của khai triển của toán tử P_0 đều triệt tiêu trừ tích phân đầu tiên, đpcm.

3. Định lý phân tích Jordan

Trong phần này của bài viết ta sẽ giả sử $\lambda_1, ..., \lambda_q$ là tất cả các giá trị riêng phân biệt của toán tử A và ta sẽ giải thích lại định lý phân tích Jordan bằng cách áp dụng các kết quả thu được về khai triển Laurent của giải thức ở mục trước.

Kết quả 7.

Giả sử $P_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$, $j = 1, ..., q$, là toán tử chiếu tương ứng với giá trị riêng λ_j, trong đó Γ_j là đường tròn tâm λ_j bán kính đủ bé sao cho hình tròn $\overline{\Gamma_j}$ không chứa giá trị riêng nào khác.

Khi đó, $I = P_1 + ... + P_q = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$, trong đó Γ_R là đường tròn tâm tại điểm 0 bán kính R sao cho $R > \operatorname{spec}(A)$.

Hơn nữa, $V = \operatorname{Im}(P_1) \oplus \operatorname{Im}(P_2) \oplus ... \oplus \operatorname{Im}(P_q)$ và $\operatorname{Im}(P_j) = \operatorname{Ker}(\lambda_j I - A)^{m_j}$, trong đó $m_j = \dim(\operatorname{Im}(P_j))$, $j = 1, ..., q$.

Chứng minh kết quả 7.

Do $R > \operatorname{spec}(A)$ nên đương tròn Γ_R chứa tất cả các giá trị riêng của toán tử A.

Bằng cách áp dụng định lý thặng dư và các kết quả thu được khi phân tích khai triển Laurent của giải thức ta thu được

$$\sum_{j=1}^{q} P_j = \sum_{j=1}^{q} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \oint_{\Gamma_R} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}} d\lambda = \frac{I}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} \frac{d\lambda}{\lambda} = I ,$$

do tất cả các số hạng của chuỗi đều triệt tiêu trừ số hạng đầu tiên.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng P_j là toán tử chiếu song song của P_k nếu $k \neq j$, tức là $P_j P_k = 0$.

Thật vậy,

$$(2\pi i)^2 P_j P_k = \oint_{\Gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \oint_{\Gamma_k} (\mu I - A)^{-1} d\mu = \oint_{\Gamma_j} \oint_{\Gamma_k} (\lambda I - A)^{-1} (\mu I - A)^{-1} d\mu d\lambda .$$

Bằng cách sử dụng hệ thức ii) trong bổ đề 1) của kết quả 4, ta suy ra

$$(2\pi i)^2 P_j P_k = \oint_{\Gamma_j}\oint_{\Gamma_k} \frac{(\lambda I - A)^{-1} - (\mu I - A)^{-1}}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda = \oint_{\Gamma_j} (\lambda I - A)^{-1} \oint_{\Gamma_k} \frac{1}{\mu - \lambda} d\mu d\lambda - \oint_{\Gamma_k} (\mu I - A)^{-1} \oint_{\Gamma_j} \frac{1}{\mu - \lambda} d\lambda d\mu = 0,$$

do đường tròn C_j nằm ngoài đường tròn C_k.

Điều này chỉ ra rằng $V = \operatorname{Im}(P_1) \oplus \operatorname{Im}(P_2) \oplus ... \oplus \operatorname{Im}(P_q)$.

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\operatorname{Im}(P_j) = \operatorname{Ker}(\lambda_j I - A)^{m_j}, m_j = \dim(\operatorname{Im}(P_j)),\ j = 1,...,q$.

Từ hệ thức v) của kết quả 4, ta suy ra rằng $(A - \lambda_j I)^{m_j} P_j = N_j^{m_j} = 0$ nên $\operatorname{Im}(P_j) \subseteq \operatorname{Ker}(\lambda_j I - A)^{m_j}$.

Từ kết quả 5 ta suy ra $(A - \lambda_j I)^{m_j}(I - P_j)$ là đơn ánh trên $\operatorname{Ker}(P_j)$ nên $\operatorname{Ker}(\lambda_j I - A)^{m_j} \subseteq \operatorname{Im}(P_j)$.

Điều này kết thúc phép chứng minh của ta.

Từ kết quả 5 ta biết rằng toán tử $A : \operatorname{Im}(P_j) \to \operatorname{Im}(P_j)$ chỉ có duy nhất một giá trị riêng là λ_j.

Do đó ta có định nghĩa sau:

Không gian $\operatorname{Im}(P_j)$ được gọi là *không gian con riêng suy rộng liên kết với trị riêng* λ_j và $m_j = \dim(\operatorname{Im}(P_j))$ được gọi là *số bội đại số của trị riêng* λ_j.

Nhận xét rằng từ hệ thức $\operatorname{Im}(P_j) = \operatorname{Ker}(\lambda_j I - A)^{m_j}$ ta cũng nhận thấy rằng định nghĩa ở trên hoàn toàn phù hợp với các định nghĩa thông thường được sử dụng khi ta tiến hành khảo sát cấu trúc toán tử bằng phương pháp chiều cổ điển được sử dụng trong các giáo trình đại số tuyến tính thông thường.

Bây giờ ta sẽ giải thích lại giải thức theo các toán tử N_j và P_j dưới dạng hình thức tương tự như bài toán phân tích hàm phân thức hữu tỉ dưới dạng các phân thức hữu tỉ cơ bản.

Kết quả 8.

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{j=1}^{q} \left(\frac{P_j}{\lambda - \lambda_j} + \sum_{k=1}^{m_j - 1} \frac{N_j^k}{(\lambda - \lambda_j)^{k+1}} \right),\ \lambda \in \rho(A).$$

Chứng minh kết quả 8.

$$(\lambda I - A)^{-1} = (\lambda I - A)^{-1} \sum_{j=1}^{q} P_j = \sum_{j=1}^{q} (\lambda I - A)^{-1} P_j = \sum_{j=1}^{q} \left(\frac{P_j}{\lambda - \lambda_j} + \sum_{k=1}^{m_j - 1} \frac{N_j^k}{(\lambda - \lambda_j)^{k+1}} \right).$$

Toán tử D được gọi là *chéo hóa khối* nếu tồn tại một phép phân tích trực tiếp toán tử D thành các toán tử vô hướng trên các không gian con nào đó. Các hệ số của các toán tử vô hướng chính là các giá trị riêng của toán tử D.

Bây giờ ta sẽ chứng minh lại định lý phân tích Jordan và đây cũng chính là một dạng mở rộng của định lý phân tích Jordan – Chevalley:

Kết quả 9. (Jordan)

Giả sử V là một không gian định chuẩn hữu hạn chiều trên trường $\mathbb{C}$ và toán tử tuyến tính $A : V \to V$.

Khi đó, tồn tại một toán tử chéo hóa khối D và một toán tử lũy linh N sao cho $A = D + N$ và $DN = ND$.

Hơn nữa, nếu $\lambda_1,...,\lambda_q$ là các giá trị riêng phân biệt của toán tử A thì $D = \sum_{j=1}^{q} \lambda_j P_j$ và $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$, trong đó các toán tử P_j và N_j là các toán tử được định nghĩa trong kết quả 4.

Chứng minh kết quả 9.

Từ hệ thức v) của kết quả 4) ta nhận được $AP_j = \lambda_j P_j + N_j$, $j = 1,...,q$.

Bằng cách áp dụng kết quả 7) ta suy ra

$$A = A\sum_{j=1}^{q} P_j = \sum_{j=1}^{q} AP_j = \sum_{j=1}^{q}\left(\lambda_j P_j + N_j\right) = \sum_{j=1}^{q}\lambda_j P_j + \sum_{j=1}^{q} N_j .$$

Do đó, bằng cách đặt $D = \sum_{j=1}^{q}\lambda_j P_j$ và $N = \sum_{j=1}^{q} N_j$ ta nhận thấy rằng $A = D + N$.

Hiển nhiên rằng D là toán tử chéo hóa khối.

Từ hệ thức ii) trong kết quả 4) và kết quả 7) ta suy ra được $P_k N_j = P_k P_j N_j = \delta_{kj} N_j = N_j P_k$.

Do đó, N là toán tử lũy linh và $DN = ND$.

Phần việc còn lại của ta là chứng minh tính duy nhất của phép phân tích nêu ở trên.

Thật vậy, giả sử $A = D + N$ trong đó D là toán tử chéo hóa khối, N là toán tử lũy linh và $DN = ND$.

Từ kết quả 6) ta suy ra rằng $\rho\left(D\right) = \rho\left(A\right)$ nên $\lambda_1,...,\lambda_q$ là các giá trị riêng của toán tử D.

Do D là toán tử chéo hóa khối nên $DP_j = \lambda_j P_j$ và $NP_j = AP_j - \lambda_j P_j = N_j$, $j = 1,...,q$, nên $D = D$ và $N = N$.

Nhận xét rằng các toán tử D, N được xác định duy nhất theo toán tử A và toán tử A chéo hóa được khi và chỉ khi tất cả các giá trị riêng của toán tử A đều là các cực điểm đơn của giải thức $\left(\lambda I - A\right)^{-1}$.

Thật vậy, điều kiện cần và đủ để toán tử A chéo hóa được là $N_j = 0$ với mọi $j = 1,...,q$ hay tất cả các giá trị riêng đều là các cực điểm đơn của giải thức.

4. Định lý Cayley – Hamilton

Nếu $p\left(\lambda\right) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$ thì ta định nghĩa $p\left(A\right) := a_n A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_0 I$.

Để chứng minh khẳng định quan trọng này ta sẽ tìm cách biểu diễn $p\left(A\right)$ dưới dạng một công thức tích phân dạng Cauchy như sau:

Kết quả 10.

Nếu $p\left(\lambda\right) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ... + a_0$ là một đa thức thì $p\left(A\right) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma(R)} p\left(\lambda\right)\left(\lambda I - A\right)^{-1} d\lambda$,

$\Gamma\left(R\right)$ là đường tròn tâm tại điểm $\lambda = 0$ với bán kính $R > \operatorname{spec}\left(A\right)$.

Chứng minh kết quả 10.

Từ tính tuyến tính của phép toán tích phân để chứng minh khẳng định của bài toán ta chỉ cần xét vấn đề với $p\left(\lambda\right) = \lambda^k$.

Bằng cách sử dụng kết quả 7 và công thức tích phân Cauchy, ta nhận được

$$2\pi i A^k = \oint\limits_{\Gamma(R)} A^k\left(\lambda I - A\right)^{-1} d\lambda = \oint\limits_{\Gamma(R)} \left(\lambda I - \left(\lambda I - A\right)\right)^k \left(\lambda I - A\right)^{-1} d\lambda$$

$$= \sum_{l=0}^{k}\left(-1\right)^l \binom{k}{l} \oint\limits_{\Gamma(R)} \lambda^{k-l}\left(\lambda I - A\right)^{l-1} d\lambda = \oint\limits_{\Gamma(R)} \lambda^k \left(\lambda I - A\right)^{-1} d\lambda .$$

Kết quả 11.

Nếu p là một đa thức bất kì thì $p(A)=\sum_{j=1}^{q}\left(p(\lambda_j)P_j+\sum_{k=1}^{m_j-1}\frac{p^{(k)}(\lambda_j)}{k!}N_j^k\right)$ trong đó $p^{(k)}$ là đạo hàm cấp k của đa thức p.

Chứng minh kết quả 11.

Từ kết quả 10 và kết quả 8, ta suy ra

$$p(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma(R)} p(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}\,d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{q}\oint_{\Gamma(j)} p(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}\,d\lambda$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{q}\left(\oint_{\Gamma_j}\frac{p(\lambda)}{\lambda-\lambda_j}d\lambda P_j+\sum_{k=1}^{m_j-1}\oint_{\Gamma_j}\frac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_j)^{k+1}}d\lambda N_j^k\right)$$

Bằng cách áp dụng công thức tích phân Cauchy, ta thấy rằng

$$p(\lambda_j)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_j}\frac{p(\lambda)}{\lambda-\lambda_j}d\lambda,$$

$$p^{(k)}(\lambda_j)=\frac{k!}{2\pi i}\oint_{\Gamma_j}\frac{p(\lambda)}{(\lambda-\lambda_j)^{k+1}}d\lambda.$$

Kết hợp các công thức trên vào khai triển của toán tử $p(A)$ ta thu được kết quả cần chứng minh.

Kết quả 12. (Cayley-Hamilton)

Nếu p_A là đa thức đặc trưng của toán tử A thì $p_A(A)=0$.

Chứng minh kết quả 12.

Từ định nghĩa của đa thức đặc trưng ta suy ra rằng $p_A(\lambda)=\prod_{j=1}^{q}(\lambda-\lambda_j)^{m_j}$ trong đó m_j là số bội đại số của giá trị riêng λ_j. Do đó, $p_A^{(k)}(\lambda_j)=0$, $0\le k\le m_j-1$, nên bằng cách áp dụng kết quả 11) $p_A(A)=0$.

Từ kết quả vừa chứng minh ở trên ta có định nghĩa sau:

Đa thức chuẩn tắc p có bậc thấp nhất sao cho $p(A)=0$ được gọi là *đa thức tối tiểu* của toán tử A.

Từ kết quả 11) ta suy ra rằng $p(A)p(A)=\sum_{j=1}^{q}\left(p(\lambda_j)P_j+\sum_{k=1}^{m_j-1}\frac{p^{(k)}(\lambda_j)}{k!}N_j^k\right)=0$, trong đó n_j là bậc theo nghĩa cực điểm của λ_j đối với giải thức.

Nhận xét rằng tập các toán tử $\{P_j:1\le j\le q\}\cup\{N_j^k:1\le k\le n_j,1\le j\le q\}$ độc lập tuyến tính nên $p^{(k)}(\lambda_j)=0$ với mọi $j=1,...,q$ và $k=0,...,n_j-1$.

Do đó ta có một hệ quả cơ bản sau:

Kết quả 13.

Giả sử A là một ma trận trên trường $\mathbb{C}$ với các giá trị riêng phân biệt là $\lambda_1,...,\lambda_q$.

Khi đó, đa thức tối tiểu của ma trận A cho bởi hệ thức $p(\lambda)=\prod_{j=1}^{q}(\lambda-\lambda_j)^{n_j}$, trong đó n_j là bậc của cực điểm λ_j đối với giải thức $(\lambda I-A)^{-1}$.

Tài liệu tham khảo:
[1]. Alexander P. Campbell, Daniel Daners, Linear Algebra via Complex Analysis, January/24/2014.
[2]. Trương Phước Nhân, Bài toán chéo hóa, 10/05/2018.
[3]. Trương Phước Nhân, Cấu trúc của toán tử tuyến tính, 10/07/2018.
[4]. Trương Phước Nhân, Phép thu gọn Jordan cho tự đồng cấu lũy linh, 15/05/2018.
[5]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết chuỗi lũy thừa, 02/01/2019.
[6]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết chuỗi Laurent, 08/01/2019.
[7]. Trương Phước Nhân, Lý thuyết thặng dư, 12/01/2019.