Lý thuyết chuỗi lũy thừa

Trương Phước Nhân, 02/01/2019

Nội dung của bài viết trình bày các kết quả kinh điển của lý thuyết chuỗi lũy thừa dựa trên quan điểm giải tích thực.

I. Kiến thức cơ bản

Chuỗi lũy thừa là chuỗi hàm có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x-x_0\right)^n = a_0 + a_1\left(x-x_0\right) + \ldots + a_n\left(x-x_0\right)^n + \ldots, \qquad (1)$$

trong đó a_n ($n = 0,1,2,\ldots$), x_0 là những hằng số thực.

Chú ý rằng bằng cách đặt $X = x - x_0$ ta luôn luôn có thể đưa chuỗi lũy thừa ở dạng (1) về dạng thu gọn

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots \qquad (2)$$

Do đó ở đây ta chỉ cần nghiên cứu chuỗi lũy thừa ở dạng (2) là đủ.

Sau đây ta sẽ khảo sát một số tính chất cơ bản xoay quanh các chuỗi lũy thừa

Kết quả 1. (Abel)

a) Nếu chuỗi lũy thừa hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$ thì nó hội tụ tuyệt đối tại mọi điểm x thỏa mãn điều kiện $|x| < |x_0|$

b) Nếu chuỗi lũy thừa phân kì tại điểm x_1 thì nó sẽ phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn điều kiện $|x| > |x_1|$

Chứng minh kết quả 1

a) Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$.

Khi đó, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$

$$\Rightarrow \left|a_n x_0^n\right| \le M,\ n = 0,1,2,\ldots$$

Xét số hạng tổng quát của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ với $|x| < |x_0|$,

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n . \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n\right| . \left|\frac{x^n}{x_0^n}\right| \le Mq^n, \text{ trong đó } q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1.$$

Do chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \left|a_n x^n\right|$ hội tụ.

Vậy chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tuyệt đối với mọi điểm x thỏa mãn điều kiện $|x| < |x_0|$.

b) Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm x_2 nào đó thỏa mãn điều kiện $|x_2| > |x_1|$.

Áp dụng kết quả của phần a) ta suy ra chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ với mọi điểm x thỏa mãn điều kiện $|x| < |x_2|$, nên chuỗi lũy thừa đã cho hội tụ tại điểm x_1.

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của bài toán.

Vậy chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| > |x_1|$.

Khi đi sâu vào khảo sát sự hội tụ của một chuỗi lũy thừa ta nhận thấy có những trường hợp sau có thể xảy ra: chuỗi chỉ hội tụ tại một điểm $x=0$ duy nhất, chuỗi hội tụ tại mọi điểm thuộc đường thẳng thực, chuỗi hội tụ trong một khoảng nào đó và phân kì bên ngoài khoảng đó.

Như vậy một câu hỏi được đặt ra ở đây là :

"Liệu có tồn tại số $R \geq 0$ sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ khi $|x| < R$ và phân kì khi $|x| > R$ hay không?"

Kết quả sau sẽ nêu câu trả lời cho câu hỏi trên

Kết quả 2.

Cho trước một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bất kì.

Khi đó, luôn tồn tại một số $R \geq 0$ (có thể bằng vô cùng) sao cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| < R$ và phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| > R$.

Chứng minh kết quả 2

Trong trường hợp chuỗi lũy thừa chỉ hội tụ tại điểm $x=0$ duy nhất ta đặt $R=0$, còn trong trường hợp chuỗi lũy thừa hội tụ tại mọi điểm thuộc đường thẳng thực ta đặt $R=\infty$.

Giả sử chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm $x_0 \neq 0$ và phân kì tại điểm $x_1 \neq \infty$.

Áp dụng định lí Abel ta suy ra trên nửa đường thẳng thực tồn tại một đoạn thẳng $[a_1, b_1]$ sao cho a_1 là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa còn b_1 là điểm phân kì của nó.

Ta chia đoạn $[a_1, b_1]$ thành hai đoạn bằng nhau và kí hiệu $[a_2, b_2]$ là đoạn mà trong đó a_2 là điểm hội tụ của chuỗi lũy thừa còn b_2 là điểm phân kì của nó. Tiếp tục quá trình trên ta thu được một dãy các đoạn $[a_n, b_n]$ thỏa mãn $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, a_n là điểm hội tụ, b_n là điểm phân kì và đường kính $\frac{b_1 - a_1}{2^n} \to 0$ khi $n \to \infty$. Theo nguyên lý Cantor, $\exists a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$.

Đặt $R = a$. Ta sẽ chứng minh chuỗi lũy thừa hội tụ với mọi điểm x thỏa mãn $|x| < R$ và phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| > R$.

Thật vậy, do $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ và $a_n \leq a_{n+1}$ nên $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $a_{n_0} < a = R$.

Áp dụng định lí Abel ta suy ra chuỗi lũy thừa hội tụ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| < R$.

Do $\lim_{n\to\infty} b_n = a$ và $b_n \geq b_{n+1}$ nên $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $b_{n_1} > a = R$.

Áp dụng định lí Abel ta suy ra chuỗi lũy thừa phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| > R$.

Lưu ý: Số R có các tính chất được mô tả trong khẳng định trên được gọi là bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Một cách chính xác hơn ta có công thức để xác định giá trị cụ thể của bán kính hội tụ R như sau:

Kết quả 3. (Cauchy – Hadamard)

Cho trước một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ bất kì.

Khi đó, bán kính hội tụ của chuỗi lũy thừa được tính theo công thức $R = \frac{1}{l} = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$,

trong đó ta đặt $R = 0$ nếu $l = +\infty$ và $R = +\infty$ nếu $l = 0$.

Chứng minh kết quả 3

1) Nếu $l = +\infty$ thì chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ không thể hội tụ tại bất kì điểm $x \neq 0$ nào cả.

Thật vậy, nếu $\exists x_0 \neq 0$ sao cho chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ thì ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

Điều này kéo theo $|a_n x_0^n| < M, n = 0,1,2,...$, nên $\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{M}{|x_0|}$.

Vậy $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{M}{|x_0|}$, mâu thuẫn với giả thiết.

2) Nếu $l = 0$ thì $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Do đó, $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n \in \mathbb{N}$ mà $n > n_0$ suy ra $\sqrt[n]{|a_n|} < \varepsilon$.

Xét chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tại điểm $x_0 \neq 0$ bất kì.

Chọn $\varepsilon = \frac{1}{2|x_0|}$, ta có $|a_n x_0^n| = |a_n|.|x_0^n| < \frac{1}{2^n}$.

Do chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ nên ta suy ra $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ.

Do điểm x_0 được chọn bất kì nên chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại mọi điểm thuộc đường thẳng thực.

3) Giả sử $0 < l < +\infty$, ta sẽ chứng minh rằng chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| < \frac{1}{l}$ và phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn $|x| > \frac{1}{l}$.

Theo giả thiết của bài toán $l = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ nên ta suy ra $\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon$ với n đủ lớn và ε tùy ý.

Với $|x_0| < \frac{1}{l}$, bằng cách chọn $\varepsilon = \frac{1 - l|x_0|}{2|x_0|}$ ta suy ra $\sqrt[n]{|a_n|} < l + \frac{1 - l|x_0|}{2|x_0|} = \frac{1 + l|x_0|}{2|x_0|}$.

Do đó, $|a_n x_0^n| < \left(\frac{1 + l|x_0|}{2}\right)^n = q^n$, trong đó $0 < q < 1$.

Vậy chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hội tụ tại điểm x_0.

Mặt khác, từ hệ thức $l = \overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ ta suy ra được có vô số các giá trị của n sao cho $\sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon$ với ε tùy ý.

Với $|x_0| > \frac{1}{l}$, bằng cách chọn $\varepsilon = \frac{1+l|x_0|}{|x_0|}$ ta suy ra $|a_n x_0^n| > \left(\frac{1+l|x_0|}{2}\right)^n = 1$, nghĩa là dãy $a_n x_0^n$ không dần về 0 khi $n \to \infty$.

Vậy chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ phân kì tại điểm x_0.

II. Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

1. Khai triển hàm thành chuỗi lũy thừa

Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0.

Tìm biểu diễn của hàm số $f(x)$ dưới dạng một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

Giả sử $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$

$$\Rightarrow f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + ... + na_n(x - x_0)^{n-1} + ...$$

$$\Rightarrow f''(x) = 2a_2 + ... + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + ...$$

$$\dots$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(x) = n!a_n + ...$$

Thay giá trị $x = x_0$ vào hệ thức trên ta suy ra: $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Khi đó,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

Chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ được gọi là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận của điểm x_0.

Trong trường hợp khi $x_0 = 0$, chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ được gọi là chuỗi Maclaurin của hàm số $f(x)$.

Nhận xét rằng nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và có thể biểu diễn dưới dạng một chuỗi lũy thừa trong lân cận đó thì chuỗi lũy thừa này phải là chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$ trong lân cận ấy.

2. Điều kiện hội tụ

Tiếp theo, ta sẽ trình bày một số kết quả liên quan đến điều kiện hội tụ của chuỗi Taylor

Kết quả 4.

Giả sử cho trước hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0.

Khi đó, nếu $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ trong đó $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$ với ξ là một điểm nào đó nằm giữa x_0 và x thì ta luôn có thể khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong một lân cận nào đó của điểm x_0.

Chứng minh kết quả 4

Giả sử $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), n=0,1,2,...$

Để giải quyết bài toán ta sẽ chứng minh rằng $\exists\xi$ nằm giữa x_0 và x sao cho $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Xét hàm số $F(t)=f(x)-f(t)-f'(t)(x-t)-\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2-...-\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$.

Khi đó,

$$F'(t)=-f'(t)-f''(t)(x-t)+f'(t)-\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2+f''(t)(x-t)-$$
$$...-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}$$
$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Bằng cách đặt $G(t)=F(t)-\left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1}F(x_0)$, ta nhận thấy $G(x_0)=0$ và $G(x)=F(x)=0$.

Mặt khác,

$$G'(t)=F'(t)+(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x_0-a)^{n+1}}F(x_0)$$
$$=-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n+(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x_0-a)^{n+1}}F(x_0)$$

Áp dụng định lí Rolle cho hàm $G(t)$, $\exists\xi$ nằm giữa x_0 và x sao cho

$$G'(\xi)=0$$
$$-\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n+(n+1)\frac{(x-\xi)^n}{(x_0-a)^{n+1}}F(x_0)=0$$
$$F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Từ cách xây dựng hàm $F(t)$ ta suy ra $R_n(x)=F(x_0)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Do $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ nên $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}P_n(x)$.

Đồng thời, $P_n(x)$ chính là tổng riêng thứ n của chuỗi Taylor của hàm số $f(x)$, nên

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+...$$

Kết quả 5.

Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm mọi cấp trong một lân cận nào đó của điểm x_0 và mọi đạo hàm của hàm số này đều bị chặn bởi cùng một hằng số thì ta luôn có thể khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.

Chứng minh kết quả 5

Theo giả thiết bài toán ta nhận thấy rằng $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$, $n = 0,1,2,...$, với mọi x nằm trong một lân cận nào đó của điểm x_0.

Áp dụng kết quả thu được ở khẳng định trước ta nhận được

$$\left|R_n(x)\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1} \le \frac{M}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}.$$

Do chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-x_0)^n}{n!}$ có miền hội tụ là $\frac{(x-x_0)^n}{n!} \to 0$ khi $n \to \infty$.

Từ đây ta suy ra $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, nên ta luôn có thể khai triển hàm số $f(x)$ thành chuỗi Taylor trong lân cận ấy.

3. Chuỗi Maclaurin của một số hàm thông dụng

Trong thực hành ta thường sử dụng một số khai triển chuỗi lũy thừa của một số hàm cơ bản sau:

a) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$

b) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ...$

c) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + ...$

d) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ...$

e) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + ...$

III. Các phép toán trên các chuỗi lũy thừa

Trong thực hành ta thường chia các bài toán xác định hệ số trong khai triển của một chuỗi lũy thừa thành các bài toán xác định hệ số trên các lớp hàm cơ bản. Cơ sở của cách tính toán này dựa trên kết quả cơ bản sau:

Kết quả 6.

Giả sử cho trước hai chuỗi lũy thừa $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ với bán kính hội tụ tương ứng lần lượt là R_f và R_g. Khi đó:

a) Hàm số $\lambda f(x)$ cũng có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa và $\lambda f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n$, trong đó bán kính hội tụ $R_{\lambda f} = R_f$.

b) Hàm số $f(x)+g(x)$ cũng có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa và $f(x)+g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$,trong đó bán kính hội tụ $R_{f+g} \ge \min(R_f, R_g)$.

c) Hàm số $f(x)g(x)$ cũng có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa và $f(x)g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$,

trong đó $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$, $n=0,1,2,...$, bán kính hội tụ $R_{fg}\geq\min(R_f,R_g)$.

d) Hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$, giả thiết thêm rằng hàm số $g(x)\neq 0$ trong một lân cận nào đó của điểm 0, cũng có thể khai triển thành chuỗi lũy thừa và $\frac{f(x)}{g(x)}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$,

trong đó $c_0=\frac{a_0}{b_0}$, $c_n=\frac{1}{b_0^{n+1}}\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & a_n \end{vmatrix}$, $n=1,2,...,$ với bán kính hội tụ $R_{\frac{f}{g}}\geq\min(R_f,R_g)$.

Chứng minh kết quả 6.

a) Xét các điểm x thỏa mãn điều kiện $|x|<R_f$ thì khi đó chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ sẽ hội tụ.

Từ đây ta suy ra chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n$ hội tụ và $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n=\underbrace{\lambda\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n}_{=\lambda f(x)}$.

Điều này chứng tỏ rằng $R_{\lambda f}\geq R_f$.

Bằng cách áp dụng lập luận vừa trình bày ở trên cho chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\lambda a_n x^n$ và hằng số $\frac{1}{\lambda}$, ta suy ra $R_f\geq R_{\lambda f}$.

b) Xét các điểm x thỏa mãn điều kiện $|x|<\min(R_f,R_g)$ thì khi đó chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ sẽ hội tụ.

Từ đây ta suy ra chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ hội tụ và $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n}_{=f(x)+g(x)}$.

Điều này chứng tỏ rằng $R_{f+g}\geq\min(R_f,R_g)$.

c) Xét các điểm x thỏa mãn điều kiện $|x|<\min(R_f,R_g)$ thì khi đó chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

Đồng thời ta nhận thấy $\left(\sum_{n=0}^{N}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{N}b_n x^n\right)=\sum_{n=0}^{2N}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n$ nên chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n$ hội tụ và $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}\right)x^n=\underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\right)}_{=f(x)g(x)}$.

Điều này chứng tỏ rằng $R_{f+g} \ge \min\left(R_f, R_g\right)$.

d) Xét các điểm x thỏa mãn điều kiện $|x| < \min\left(R_f, R_g\right)$ thì khi đó chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ và $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sẽ hội tụ tuyệt đối.

Nhận xét từ điều kiện của bài toán ta suy ra được rằng $b_0 \ne 0$, bởi vì trong trường hợp ngược lại ta thu được $g(0) = 0$ và do đó đi đến mâu thuẫn với giả thiết bài toán.

Do vậy ta nhận thấy rằng luôn có thể biểu diễn hàm số $\frac{1}{g(x)}$ thành một chuỗi lũy thừa trong một lân cận nào đó của điểm 0.

Kết hợp với kết quả ở phần b) ta suy ra được rằng hàm số $\frac{f(x)}{g(x)}$ luôn có thể khai triển được thành chuỗi lũy thừa và tạm giả sử $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$.

Khi đó, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)$.

Do các chuỗi lũy thừa ở vế phải hội tụ tuyệt đối với mọi giá trị x nằm trong hình tròn $|x| < \min\left(R_f, R_g\right)$ nên trong lân cận này ta có thể thực hiện phép nhân các chuỗi lũy thừa này và thu được:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} c_k b_{n-k}\right)x^n \\ &= c_0 b_0 + \left(c_0 b_1 + c_1 b_0\right)x + \left(c_0 b_2 + c_1 b_1 + c_2 b_0\right)x^2 + \ldots + \left(c_0 b_n + c_1 b_{n-1} + \ldots + c_n b_0\right)x^n + \ldots\end{aligned}$$

Do tính duy nhất của khai triển hàm số thành chuỗi lũy thừa nên nhận được các hệ thức sau

$$\begin{aligned} &b_0 c_0 &&= a_0, \\ &b_1 c_0 + b_0 c_1 &&= a_1, \\ &b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2 &&= a_2, \\ & &&\cdots \\ &b_n c_0 + b_{n-1} c_1 + \ldots + b_0 c_n &&= a_n, \\ & &&\cdots \end{aligned}$$

Đây là một hệ gồm vô hạn các phương trình tuyến tính với các ẩn số $c_0, c_1, \ldots, c_n, \ldots$

Từ hệ phương trình này bằng cách áp dụng quy tắc Cramer cho $n+1$ phương trình đầu tiên ta có thể xác định được các ẩn số $c_0, c_1, \ldots, c_n$

Thật vậy, do $\begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & 0 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & b_0 \end{vmatrix} = b_0^{n+1} \ne 0$ nên hệ $n+1$ phương trình này luôn có nghiệm duy nhất và $c_n = \dfrac{1}{b_0^{n+1}} \begin{vmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ b_1 & b_0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ b_2 & b_1 & b_0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_0 & a_{n-1} \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_1 & a_n \end{vmatrix}$.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Văn Thương, Hàm số biến số phức, Nhà xuất bản Giáo dục.
[2]. Nguyễn Thủy Thanh, Cơ sở lý thuyết hàm biến phức, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.
[3]. Nguyễn Xuân Liêm, Giáo trình Giải Tích - Tập 1, Nhà xuất bản Giáo dục.
[4]. Trương Phước Nhân, Cơ sở của hàm sinh, 31/07/2018.
[5]. Trương Phước Nhân, Chuỗi lũy thừa hình thức, 09/06/2018.