Lý thuyết thặng dư

Trương Phước Nhân, 12/01/2019

Nội dung của bài viết trình bày các kết quả quan trọng liên quan đến bài toán tính tích phân phức dựa trên công cụ khai triển Laurent.

I. Đặt vấn đề

Đầu tiên ta nhắc lại một kết quả quan trọng về bài toán tính tích phân phức được nêu bởi Cauchy

"Nếu hàm số $f(z)$ giải tích trong miền D thì $\int_\gamma f(z)dz = 0$ trong đó γ là một đường cong Jordan đóng, trơn (hoặc trơn từng khác) chứa trong D".

Một vấn đề tự nhiên được đặt ra là nếu hàm $f(z)$ giải tích trong miền D trừ một số hữu hạn điểm bất thường cô lập, γ là một đường cong Jordan đóng, trơn (hoặc trơn từng khác) và giả thiết thêm rằng bên trong miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi γ hàm $f(z)$ chỉ có các điểm bất thường cô lập $a_k, k=1,...,n$ thì tích phân $\int_\gamma f(z)dz$ được tính như thế nào ?

Ý tưởng cơ bản để tính toán tích phân $\int_\gamma f(z)dz$ như sau:

Giả sử $\Gamma(r_k) = \{z : |z - a_k| = r_k\}$, $k = 1,2,...,n$, là đường tròn bao quanh các điểm bất thường cô lập a_k với r_k là các số dương đủ bé sao cho các hình tròn $\overline{\Gamma(r_k)} = \{z : |z - a_k| \le r_k\} \subset G$ và $\overline{\Gamma(r_k)} \cap \overline{\Gamma(r_{k'})} = \varnothing, k \ne k'$.

Đặt B là miền phẳng hữu hạn giới hạn bởi đường cong Jordan γ và $B^* = B \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{\Gamma(r_k)}$.

Khi đó, hàm $f(z)$ giải tích trong miền con B^* nên bằng cách áp dụng định lý Cauchy ta thu được

$$\int_{\partial B^*} f(z)dz = 0.$$

Mặt khác, do $\partial B^* = \gamma \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n} \Gamma^-(r_k)\right)$ nên từ hệ thức trên ta suy ra $\int_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma(r_k)} f(z)dz$.

Nếu ta đặt $\mathrm{Res}(f, a_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(r_k)} f(z)dz$ thì $\boxed{\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z_0)}$.

(Lưu ý cách đặt vừa trình bày là hoàn toàn hợp lý bởi vì tích phân $\int_{\Gamma(r_k)} f(z)dz$ không phụ thuộc vào đường tròn $\Gamma(r_k)$)

Đại lượng $\mathrm{Res}(f, a_k)$ được gọi là thặng dư của hàm $f(z)$ tại điểm bất thường cô lập a_k.

II. Cách tính toán thặng dư

Việc tính toán thặng dư bằng cách xuất phát từ định nghĩa vừa nêu ở trên khá rườm rà. Do đó ta rất cần đến các quy tắc tính toán thặng dư đơn giản và dễ sử dụng hơn trong thực hành và cơ sở cho việc tính toán thặng dư trong thực tiễn là nhờ vào phân tích sau:

Đầu tiên, ta thực hiện phép khai triển Laurent đối với hàm $f(z)$ tại điểm bất thường cô lập z_0, ta thu được

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z - z_0)^m$$

Do $\oint_{\Gamma(\rho)} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 0, & m \ne -1 \\ 2\pi i, & m = -1 \end{cases}$ với $\Gamma(\rho)$ là đường tròn bao quanh z_0 với bán kính ρ đủ bé nên hàm $f(z)$ giải tích trong miền $\overline{\Gamma(\rho)}$.

Bằng cách lấy tích phân cả hai vế theo đường cong $\Gamma(\rho)$, ta được

$$\oint_{\Gamma(\rho)} f(z)dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \oint_{\Gamma(\rho)} (z-z_0)^m dz = c_{-1}$$

Tiếp theo ta sẽ áp dụng kết quả phân tích vừa thu được khảo sát cách tính thặng dư trong trường hợp điểm bất thường cô lập là các cực điểm.

Trường hợp 1. z_0 là cực điểm đơn của hàm $f(z)$.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-z_0)^m .$$

Do đó, $\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Trường hợp 2. z_0 là cực điểm cấp n ($n \geq 2$) của hàm $f(z)$.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-z_0)^m .$$

Bằng cách nhân cả hai vế $(z-z_0)^n$ và lấy đạo hàm đến cấp $(n-1)$, ta thu được

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right].$$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trương Văn Thương, Hàm số biến số phức, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2]. Nguyễn Thủy Thanh, Cơ sở lý thuyết hàm biến phức, Nhà xuất bản Đại học Quốc Gia Hà Nội.