# Partial SDR

Trương Phước Nhân, 31/07/2018

Trong các bài viết trước ta đã khảo sát nhiều về các SDR. Nhưng như ta có thể thấy được rằng không phải lúc nào khi cho trước một hệ tập thì ta cũng có thể xác định được một SDR.

Một câu hỏi tự nhiên xuất hiện trong đầu của ta lúc này đó là:

Nếu cho trước một hệ gồm $n$ tập thì ta có thể tìm được tối đa là bao nhiêu tập $m$ trong số các tập này mà có một SDR?

Giả sử ta được cho trước một hệ $A_1, A_2, ..., A_n$ và giả sử thêm rằng hệ này không có SDR.

Khi đó, từ định lý Hall, ta tìm được các tập $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ sao cho $\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = l < k$, nên có tối đa là $l$ tập trong số các các tập $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$ này có một SDR, do đó không thể có một partial SDR của hệ $A_1, A_2, ..., A_n$ có nhiều hơn $n-k+l$ phần tử.

Như vậy, giá trị $m$ cần tính không thể lớn hơn giá trị nhỏ nhất của $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ khi lấy trên tất cả các giá trị $k$ và tất cả các hệ $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$.

Chú ý, nếu $\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| > k$ thì $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| > n$, nhưng lưu ý rằng nếu $k=0$ thì $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = n$, nên ta có thể chắc chắn rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ không bao giờ lớn hơn $n$.

Nhưng trên thực tế thì giá trị nhỏ nhất của biểu thức $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ chính là giá trị lớn nhất có thể đạt được của một partial SDR của hệ $A_1, A_2, ..., A_n$.

**Kết quả.** Giá trị lớn nhất của một partial SDR của hệ tập $A_1, A_2, ..., A_n$ bằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ lấy trên tất cả các giá trị $k$ và tất cả các hệ $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$, $0 \le k \le n$.

**Chứng minh.**

Từ phân tích ở phần đầu của bài viết ta nhận thấy rằng không thể tìm được một partial SDR có kích thước lớn hơn giá trị nhỏ nhất của biểu thức $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$, nên ta chỉ cần chỉ ra một partial SDR có kích thước bằng giá trị nhỏ nhất này là được.

Ta sẽ chứng minh điều này trình bày ở trên bằng phương pháp quy nạp toán học theo $n$.

Với $n=1$, khẳng định là hiển nhiên.

Đầu tiên, giả sử rằng giá trị nhỏ nhất đạt được khi $k=0$, giá trị nhỏ nhất khi đó bằng $n$.

Khi đó, với mọi giá trị $k$ và mọi họ $A_{i_1}, A_{i_2}, ..., A_{i_k}$, ta có $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| \ge n$, nên $\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| \ge k$.

Áp dụng định lý Hall ta suy ra hệ này có một SDR với kích thước $n$.

Nhận xét rằng giá trị nhỏ nhất của $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ đạt được khi $\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| - k$ là nhỏ nhất, tức là

$$\min\left(n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|\right) = n + \min\left(\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| - k\right).$$

Giả sử rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$, ta tạm ký hiệu là $m$, và $m = n-k+\left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ với một giá trị $0<k<n$.

Đặt $B_j = A_{i_j}$, $j = 1,...,k$, do mỗi tập $B_j$ là một tập $A_{i_j}$ nên $\left|\bigcup_{j=1}^{l} B_{h_j}\right| - l \ge \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| - k$ với mọi $1 \le l \le k$ và với mọi hệ $B_{h_1},...,B_{h_l}$.

Do đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\left|\bigcup_{j=1}^{l} B_{h_j}\right| - l$ lấy trên tất cả các giá trị $l$ và tất cả các hệ $B_{h_1},...,B_{h_l}$ là $\left|\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right| - k = \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| - k$.

Bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp, hệ tập $A_{i_1}, A_{i_2},..., A_{i_k}$ có một partial SDR với kích thước $k - k + \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| = m - n - k$, nên $\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j} = \{x_1,..., x_{m-n+k}\}$.

Bây giờ ta xét tiếp $n-k$ tập còn lại trong hệ $A_1, A_2,..., A_n$, tức là $\{A_i \mid i \notin \{i_1,...,i_k\}\}$.

Đặt $C_i = A_i \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}$ với mọi $i \notin \{i_1,..., i_k\}$.

Xét một hệ tập $C_{g_1}, C_{g_2},..., C_{g_l}$ bất kỳ.

Nếu $\left|\bigcup_{j=1}^{l} C_{g_j}\right| < l$ thì $\left|\bigcup_{j=1}^{l} C_{g_j}\right| - l < 0$, nên

$$\begin{aligned} n - k + \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| &> n - k - l + \left|\bigcup_{j=1}^{l} C_{g_j}\right| + \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right| \\ &\ge n - (k+l) + \left|C_{g_1} \cup C_{g_2} \cup ... \cup C_{g_l} \cup A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}\right| \\ &\ge n - (k+l) + \left|A_{g_1} \cup A_{g_2} \cup ... \cup A_{g_l} \cup A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}\right|, \end{aligned}$$

điều này mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của $n - k + \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$, nên $\left|\bigcup_{j=1}^{l} C_{g_j}\right| > l$ với mọi giá trị $l$.

Áp dụng định lý Hall ta suy ra hệ $C_{g_1}, C_{g_2},..., C_{g_{n-k}}$ có một SDR là $\{y_1,..., y_{n-k}\}$.

Từ cách xây dựng các tập $C_i$ ta nhận thấy $\{x_1,..., x_{m-n+k}\} \cap \{y_1,..., y_{n-k}\} = \varnothing$, nên $\{x_1,..., x_{m-n+k}\} \cup \{y_1,..., y_{n-k}\}$ là một SDR có kích thước $m - n + k + n - k = m$, điều phải chứng minh.

Sau cùng, giả sử giá trị nhỏ nhất của biểu thức $n - k + \left|\bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}\right|$ đạt được khi $k = n$, tức là ta cần phải chỉ ra một partial SDR có kích thước bằng $n - n + \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$.

Khi đó, $n - (n-1) + \left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right| > \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$

$$1 + \left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right| > \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$$

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right| \ge \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|.$$

Do $\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right| \le \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$, nên $\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$.

Nếu giá trị nhỏ nhất của biểu thức $(n-1)-l+\left|\bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|$ đạt được khi $l=n-1$, bằng cách áp dụng giả thiết quy nạp, ta tìm được một partial SDR có kích thước bằng $(n-1)-(n-1)+\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right|=\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right|=\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$.

Trong trường hợp giá trị nhỏ nhất đạt được khi $l<n-1$ và $l=n-1$ không làm cực tiểu biểu thức, ta có

$$(n-1)-l+\left|\bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|<\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right|$$

$$n-l+\left|\bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|<\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right|+1.$$

Từ tính cực tiểu của $n-l+\left|\bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|$, ta có $n-l+\left|\bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|>\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|$.

Do đó, $\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right|<n-l+\left|\bigcup_{j=1}^{l} A_{i_j}\right|<\left|\bigcup_{j=1}^{n-1} A_j\right|+1$, điều này dẫn đến một sự kiện vô lí là có một số nguyên nằm giữa hai số nguyên liên tiếp.

Chú ý rằng phương pháp xây dựng partial cực đại vừa chỉ ra ở trên chỉ mang tính chất lý thuyết là chính chứ về mặt thực hành là không mấy hiệu quả, bởi vì ta phải xét tất cả các hệ con của một hệ tập cho trước.

**Tài liệu tham khảo:**

[1]. David Guichard, An Introduction to Combinatorics and Graph Theory, ??/??/2016.
[2]. Trương Phước Nhân, SDR, 24/07/2017.
[3]. Trương Phước Nhân, Transversal, 12/07/2018.