Phân tích tổng quát cho bài toán Frobenius

Trương Phước Nhân, 13/12/2018

Nội dung bài viết là phần mở rộng cho các phân tích mà ta đã thực hiện trong bài viết **"Ứng dụng hàm sinh trong chứng minh định lý Sylvester"** cho phương trình Diophant tuyến tính n biến.

Cho trước số nguyên không âm N và n số nguyên dương $a_1,...,a_n$ thỏa mãn $(a_1,...,a_n)=1$.

Xét phương trình Diophant tuyến tính $a_1x_1+...+a_nx_n=N$ ($x_1,...,x_n$ là các ẩn số).

Đặt $f(a_1,...,a_n,N):=\left|\left\{(x_1,x_2,...,x_n)\in\mathbb{N}^n \mid a_1x_1+...+a_nx_n=N\right\}\right|$.

Đôi khi, ta cũng kí hiệu $f(N)$ thay cho $f(a_1,...,a_n,N)$ trong trường hợp các số $a_1,...,a_n$ đã được xác định trước.

1. Công thức tổng quát:

Lập luận tương tự như trong trường hợp $n=2$, để xác định công thức tính toán cho $f(N)$ ta khảo sát hàm $\phi(z)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1-z^{a_i}}$.

Khi đó, dễ dàng nhận thấy ϕ là một hàm phân hình với các cực điểm là $\xi_{a_i}^{k_i}=\cos\frac{2k_i\pi}{a_i}+i\sin\frac{2k_i\pi}{a_i}$ với $i=1,...,n$ và $k_i=0,...,a_i-1$.

Các cực điểm của hàm ϕ được phân bố trên đường tròn đơn vị, $|z|=1$, cụ thể hàm ϕ có cực điểm bậc n tại $z=1$ và bậc 1 tại các điểm còn lại vì $(a_1,...,a_n)=1$.

Do đó, hàm ϕ giải tích tại $z=0$ và có một khai triển lũy thừa dưới dạng $\phi(z)=\sum_{m=0}^{\infty}f(m)z^m$ với $|z|<1$.

Áp dụng các kết quả khảo sát của lý thuyết chuỗi lũy thừa, ta nhận được

$$f(N)=\mathrm{Res}_{z=0}\left(\frac{\phi(z)}{z^{N+1}}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\varepsilon}\frac{\phi(z)dz}{z^{N+1}} \text{ với } 0<\varepsilon<1.$$

Để xác định công thức tính tổng quát cho hàm $f(N)$ ta dựa trên một số nhận xét quen thuộc sau:

<u>Nhận xét 1.</u> $1-t^a=\prod_{l=0}^{a-1}\left(1-\xi_a^l t\right)$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Áp dụng nhận xét 1) ta biểu diễn lại công thức tính cho hàm ϕ dưới dạng $\phi(z)=\frac{1}{(1-z)^n}\prod_{i=1}^{n}\prod_{l=1}^{a_i-1}\frac{1}{\left(1-\xi_{a_i}^l z\right)}$.

Áp dụng kết quả của bài toán phân tích hàm phân thức hữu tỉ cho hàm ϕ:

$$\phi(z)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{(1-z)^i}+\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=0}^{a_j-1}\frac{\alpha_{j,l}}{\left(1-\xi_{a_j}^l z\right)},$$

trong đó K_i và $\alpha_{j,l}$ ($i,j=1,...,n$ và $l=1,...,a_j-1$) là các hằng số phức nào đó.

Nhận xét 2. $\dfrac{1}{(1-z)^i} = \sum_{m=0}^{\infty} k_{i,m} z^m$ với $k_{i,m} = \dfrac{(i+m-1)!}{(i-1)!m!} = \binom{i+m-1}{m}$ và $|z|<1$.

Do $\left|\xi_{a_j}^l z\right| < 1$ nên bằng cách áp dụng nhận xét 2 ta nhận thấy $\dfrac{1}{1-\xi_{a_j}^l z} = \sum_{m=0}^{\infty} \xi_{a_j}^{ml} z^m$.

Thay kết quả vừa tìm được vào công thức khai triển của hàm ϕ, ta thu được

$$\phi(z) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} K_i k_{i,m} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{a_j-1} \alpha_{j,l}\xi_{a_j}^{ml}\right) z^m$$

$$\Rightarrow f(N) = \sum_{i=1}^{n} K_i k_{i,N} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{a_j-1} \alpha_{j,l}\xi_{a_j}^{Nl}.$$

Đặt

$$\overrightarrow{K} = (K_1,...,K_n) \in \mathbb{C}^n,$$
$$\overrightarrow{k_N} = (k_{1,N},...,k_{n,N}) \in \mathbb{C}^n,$$
$$\overrightarrow{\alpha}_j = \left(\alpha_{j,1},...,\alpha_{j,a_j-1}\right) \in \mathbb{C}^{a_j-1},$$
$$\overrightarrow{\omega}_j = \left(\xi_{a_j},\xi_{a_j}^2,...,\xi_{a_j}^{a_j-1}\right) \in \mathbb{C}^{a_j-1},$$
$$\overrightarrow{\omega}_j^N = \left(\xi_{a_j}^N,\xi_{a_j}^{2N},...,\xi_{a_j}^{(a_j-1)N}\right) \in \mathbb{C}^{a_j-1},$$

trong đó $j = 1,...,n$ và $N \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \boxed{f(N) = \left\langle \overrightarrow{K},\overrightarrow{k}_N \right\rangle + \sum_{j=1}^{n}\left\langle \overrightarrow{\alpha}_j,\overrightarrow{\omega}_j^N \right\rangle}$$

Lưu ý:

- $\left\langle \overrightarrow{K},\overrightarrow{k}_N \right\rangle$ là một đa thức bậc $n-1$ theo N.
- Số hạng $\sum_{j=1}^{n}\left\langle \overrightarrow{\alpha}_j,\overrightarrow{\omega}_j^N \right\rangle$ tuần hoàn với chu kì $a_1a_2...a_n$, do các số hạng $\left\langle \overrightarrow{\alpha}_j,\overrightarrow{\omega}_j^N \right\rangle$ tuần hoàn theo chu kì a_j

và $(a_1,...,a_n) = 1$.

Tính toán $\overrightarrow{K}$ và $\overrightarrow{\alpha}_j$

Thật vậy, bằng cách nhân cả hai vế công thức khai triển của hàm ϕ cho $(1-z)^n$ và tính đạo hàm cấp i ở hai vế tại điểm $z=0$, ta nhận được

$$K_i = \frac{1}{(n-i)!}\left(\frac{(1-z)^n}{\prod_{j=1}^{n}\left(1-z^{a_j}\right)}\right)^{(n-i)}_{z=0} \quad \text{với } i = 1,...,n$$

Lập luận tương tự như trên, nhân cả hai vế công thức khai triển của hàm ϕ cho $\left(1-\xi_{a_j}^{l} z\right)$ và tính giá trị tại $z=\xi_{a_j}^{-l}$, ta nhận được

$$\begin{aligned}\alpha_{j,l} &= \prod_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{1}{\left(1-\xi_{a_j}^{-la_i}\right)} \prod_{s=1,s\neq l}^{a_j} \frac{1}{\left(1-\xi_{a_j}^{s-l}\right)} \\ &= \prod_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{1}{\left(1-\xi_{a_j}^{-la_i}\right)} \prod_{k=1}^{a_j} \frac{1}{\left(1-\xi_{a_j}^{k}\right)} \\ &= \prod_{i=1,i\neq j}^{n} \frac{1}{\left(1-\xi_{a_j}^{-la_i}\right)} \cdot \frac{1}{a_j}\end{aligned}$$

Tài liệu tham khảo:

Sinan Sertöz, On the Number of Solutions of a Diophantine Equation of Frobenius