Ứng dụng hàm sinh trong chứng minh định lý Sylvester

Trương Phước Nhân, 24/06/2018

Trong bài viết này ta sẽ đưa ra một hướng tiếp cận khác cho định lý Sylvester đã được trình bày trong bài viết "**Phương trình Diophant tuyến tính**".

Trước hết, ta nhắc lại về định lý Sylvester:

Bài toán. (Sylvester) Cho a,b là hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau.
a) Chứng minh rằng $ab-a-b$ là số nguyên dương lớn nhất không thể biểu diễn được dưới dạng $ax+by$ với x,y là các số tự nhiên.
b) Cho n là một số nguyên không âm và nhỏ hơn hoặc bằng $ab-a-b$. Chứng minh rằng n viết được dưới dạng $n=ax+by$, với $x,y\in\mathbb{N}$ khi và chỉ khi $ab-a-b-n$ không viết được dưới dạng như vậy.

Với hai số nguyên dương nguyên tố cùng nhau a,b và số tự nhiên n ta đặt

$$p_{\{a,b\}}(n)=\left|\left\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2 \mid k,l\geq 0; ak+bl=n\right\}\right|.$$

Ta xét tích của hai cấp số nhân $\frac{1}{1-z^a}.\frac{1}{1-z^b}=\left(1+z^a+z^{2a}+...\right)\left(1+z^b+z^{2b}+...\right)$.

Nếu ta nhân tất cả các thừa số ta sẽ nhận được chuỗi lũy thừa của các lũy thừa là tổ hợp tuyến tính (với hệ số tự nhiên) của a và b. Hệ số của z^n đúng bằng $p_{\{a,b\}}(n)$.

Vì vậy, $\frac{1}{1-z^a}.\frac{1}{1-z^b}=\sum_{k,l\geq 0}^{\infty} z^{ka}z^{lb}=\sum_{n=0}^{\infty} p_{\{a,b\}}(n)z^n$.

Như vậy, hàm số này là hàm sinh của dãy $\left(p_{\{a,b\}}(n)\right)_{n=0}^{\infty}$.

Ta muốn tìm công thức đẹp cho $p_{\{a,b\}}(n)$ bằng cách xem xét kỹ lưỡng hơn hàm số ở vế trái. Để dễ tính toán hơn ta sẽ không xử lý trực tiếp trên hàm $\frac{1}{1-z^a}.\frac{1}{1-z^b}$ và sẽ tính toán trên hàm

$f(z)=\frac{1}{\left(1-z^a\right)\left(1-z^b\right)z^n}=\sum_{k=0}^{\infty} p_{\{a,b\}}(k)z^{k-n}$, cụ thể là ta sẽ tính hệ số tự do của hàm $f(z)$.

Chuỗi $\sum_{k=0}^{\infty} p_{\{a,b\}}(k)z^{k-n}$ không phải là chuỗi lũy thừa, vì nó có chứa những số hạng với số mũ âm. Chuỗi này được gọi là chuỗi Laurent.

Đối với chuỗi lũy thừa, để tính hệ số tự do ta chỉ cần thay $z=0$ vào nhưng với chuỗi có lũy thừa âm thì việc thay $z=0$ vào là không được phép. Để xử lý tình huống này, ta sẽ loại bỏ đi tất cả các số hạng với số mũ âm để được chuỗi lũy thừa. Số hạng tự do của nó (cũng là số hạng tự do của chuỗi ban đầu) sẽ được tính bằng cách thay $z=0$ vào.

Để tính số hạng tự do này, ta sẽ khai triển f thành các phân thức đơn giản. Do các cực của f nằm ở điểm $z=0$ với bậc n, tại $z=1$ với bậc 2 và tại các căn đơn vị bậc a và bậc b khác 1 với bậc 1 vì a,b nguyên tố cùng nhau. Do đó, khai triển của f thành tổng các phân thức đơn giản sẽ có dạng

$$f(z)=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+...+\frac{A_n}{z^n}+\frac{B_1}{z-1}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\sum_{k=1}^{a-1}\frac{C_k}{z-\xi_a^k}+\sum_{j=1}^{b-1}\frac{D_k}{z-\xi_b^j},$$

trong đó $\xi_a^k=\cos\frac{2\pi}{a}+i\sin\frac{2\pi}{a}$ và $\xi_b^k=\cos\frac{2\pi}{b}+i\sin\frac{2\pi}{b}$ lần lượt là các căn nguyên thủy bậc a và b của đơn vị.

Bằng phương pháp chuyển qua giới hạn ta tính được:

$$C_k=\lim_{z\to\xi_a^k}\left(z-\xi_a^k\right)f(z)=\lim_{z\to\xi_a^k}\left[\left(z-\xi_a^k\right)\frac{1}{\left(1-z^a\right)\left(1-z^b\right)z^n}\right]=...=-\frac{1}{a\left(1-\xi_a^{kb}\right)\xi_a^{k(n-1)}},$$

Tương tự: $D_k=-\frac{1}{b\left(1-\xi_b^{ja}\right)\xi_b^{j(n-1)}}$.

Để tính B_2, ta nhân $f(z)$ cho $(z-1)^2$ và tính giới hạn khi $z\to 1$, cụ thể là

$$B_2=\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^2}{(1-z^a)(1-z^b)z^n}=\frac{1}{ab}.$$

Để tính B_1 ta tính

$$B_1=\lim_{z\to 1}(z-1)\left(f(z)-\frac{B_2}{(z-1)^2}\right)=\lim_{z\to 1}(z-1)\left(\frac{1}{(1-z^a)(1-z^b)z^n}-\frac{1}{ab(z-1)^2}\right)=...=\frac{1}{ab}-\frac{1}{2a}-\frac{1}{2b}-\frac{n}{ab}.$$

Nhận thấy rằng ta không cần phải tính các hệ số $A_1,A_2,...,A_n$ vì số hạng $\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+...+\frac{A_n}{z^n}$ không đóng góp vào phép tính số hạng tự do của f nên ta có thể bỏ qua.

Như vậy, $p_{\{a,b\}}(n)=\left(f(z)-\frac{A_1}{z}-\frac{A_2}{z^2}-...-\frac{A_n}{z^n}\right)_{z=0}=\left(\frac{B_1}{z-1}+\frac{B_2}{(z-1)^2}+\sum_{k=1}^{a-1}\frac{C_k}{z-\xi_a^k}+\sum_{j=1}^{b-1}\frac{D_k}{z-\xi_b^j}\right)_{z=0}$

$$=-B_1+B_2-\sum_{k=1}^{a-1}\frac{C_k}{\xi_a^k}-\sum_{j=1}^{b-1}\frac{D_k}{\xi_b^j}.$$

Từ đó, $p_{\{a,b\}}(n)=\frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{n}{ab}+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}+\frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b-1}\frac{1}{(1-\xi_b^{ia})\xi_b^{in}}$.

Tiếp theo, ta tìm cách đơn giản các tổng trong biểu thức trên để được một công thức thuận tiện hơn.

Ta nghiên cứu trường hợp đặc biệt $b=1$.

Trường hợp này ta có thể tính được dễ dàng vì khi đó $p_{\{a,1\}}(n)$ sẽ tính số điểm nguyên trong một đoạn:

$$p_{\{a,1\}}(n)=\left|\left\{(k,l)\in\mathbb{Z}^2 \mid k,l\ge 0; ak+l=n\right\}\right|=\left|\left\{k\in\mathbb{Z} \mid 0\le k\le\frac{n}{a}\right\}\right|=\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor+1,$$

trong đó $\lfloor x\rfloor$ là phần nguyên của số thực x.

Do đó, $\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}+\frac{n}{a}+\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}=p_{\{a,1\}}(n)=\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor+1.$

Từ đó, $\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}=-\left\{\frac{n}{a}\right\}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}$, trong đó $\{x\}$ là phần lẻ của số thực x.

Ta có thể dễ dàng chứng minh được rằng $\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}=\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{k})\xi_a^{b^{-1}kn}}$, trong đó b^{-1} là số nguyên sao cho $b^{-1}.b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, n)$. Như vậy, $\frac{1}{a}\sum_{k=1}^{a-1}\frac{1}{(1-\xi_a^{kb})\xi_a^{kn}}=-\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2a}$.

Thay kết quả vừa tìm được vào biểu thức tính của $p_{\{a,b\}}(n)$ ta thu được kết quả sau:

Kết quả 1. (Popovicu) Nếu a và b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau thì

$$p_{\{a,b\}}(n)=\frac{n}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}n}{b}\right\}+1,\text{ trong đó } a^{-1}.a\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, n) \text{ và } b^{-1}.b\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, n).$$

Từ kết quả vừa chứng minh ta dễ dàng chứng minh được rằng:

Kết quả 2. Nếu a và b là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau, $n\in[1;ab-1]$ và không phải là bội số của a hoặc b thì $p_{\{a,b\}}(n)+p_{\{a,b\}}(ab-n)=1$.

Chứng minh.

Ta có

$$p_{\{a,b\}}(ab-n)=\frac{ab-n}{ab}-\left\{\frac{b^{-1}(ab-n)}{a}\right\}-\left\{\frac{a^{-1}(ab-n)}{b}\right\}+1$$

$$=2-\frac{n}{ab}-\left\{\frac{-b^{-1}n}{a}\right\}-\left\{\frac{-a^{-1}n}{b}\right\}$$

$$= -\frac{n}{ab} + \left\{\frac{b^{-1}n}{a}\right\} + \left\{\frac{a^{-1}n}{b}\right\}$$

$= 1 - p_{\{a,b\}}(n)$, trong đó ta đã sử dụng tính chất $\{-x\} = 1 - \{x\}$ với x không nguyên.

Từ Kết quả 2, ta dễ dàng chứng minh được định lý Sylvester. Hơn nữa, ta còn chỉ ra được rằng với mọi số tự nhiên n nhỏ hơn ab nếu n biểu diễn được dưới dạng $ax + by$ với x, y là các số tự nhiên thì biểu diễn đó là duy nhất.

Tài liệu tham khảo:

[1]. Trần Nam Dũng, Bài toán Frobenius về những đồng xu, Tạp chí Epsilon số 2.

[2]. Trương Phước Nhân, Phương trình Diophant tuyến tính, 24/06/2018