Lý thuyết đa thức xe

Trương Phước Nhân, 25/06/2018

1. Hoán vị với các vị trí cấm và đa thức xe

Xét các tập khác rỗng $X_1, X_2, ..., X_n \subset \{1,2,...,n\}$ và ký hiệu S_n là tập các hoán vị với độ dài bằng n.

Đặt $P(X_1, X_2, ..., X_n) = \{\sigma \in S_n \mid \sigma(i) \notin X_i, i = 1,2,...,n\}$, tập X_i được gọi là vị trí cấm của $\sigma(i)$, các hoán vị thuộc $P(X_1, X_2, ..., X_n)$ gọi là hoán vị với các vị trí cấm tương ứng với hệ $(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Để dễ hình dung, ta nhận xét rằng một hoán vị $\sigma \in S_n$ thì tương đương với một cách sắp đặt n con xe trên bàn cờ vua kích thước $n \times n$ ở các tọa độ $(i, \sigma(i))$ (đánh số các cột và các dòng bằng các số $1,2,...,n$ từ trái sang phải và từ trên xuống dưới, (x,y) biểu diễn tọa độ của ô nằm ở cột thứ x và hàng thứ y), hiển nhiên $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ nếu $i \neq j$ nên sẽ không có 2 con xe nào ăn nhau.

Khi đó, ta hình dung mỗi $\sigma \in P(X_1, X_2, ..., X_n)$ tương ứng với một cách đặt n con xe lên bàn cờ $n \times n$ sao cho không có hai con nào ăn nhau và con xe nằm ở cột thứ i thì không được phép đặt vào các ô vuông có tọa độ thuộc tập $M_i = \{(i,x) \mid x \in X_i\}$, các vị trí M_i được gọi là vị trí cấm (hiển hiên $M_i \cap M_j = \varnothing$ với $i \neq j$).

Gọi A_i là tập các cách sắp xếp mà con xe ở cột thứ i được đặt vào vị trí cấm.

Áp dụng nguyên lý bao hàm – loại trừ ta có được kết quả sau:

$$\begin{aligned}|P(X_1, X_2, ..., X_n)| &= |S_n| - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| \\ &= n! - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| - ... + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n|.\end{aligned}$$

Bây giờ ta sẽ tiền hành thu gọn biểu thức tính của $|P(X_1, X_2, ..., X_n)|$, đặt r_k là số cách đặt k con xe lên bàn cờ $n \times n$ sao cho mỗi con xe đều nằm ở vị trí cấm, quy ước $r_0 = 1$.

Khi đó $$\sum_{1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_k}| = r_k (n-k)!.$$

Do đó, $|P(X_1, X_2, ..., X_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k r_k (n-k)!$.

Như vậy, điều quan trọng là tính được các số r_k.

Với mục đích tính r_k, ta đưa vào khái niệm đa thức xe như sau:

Cho bàn cờ C kích thước $n \times n$ và miền con $B \subset C$. Giả sử $r_k(B)$ là số cách đặt k quân xe lên B sao cho không có 2 quân nào ăn nhau. Khi đó, hàm sinh $R_B(x) = \sum_{k=0}^{n} r_k(B) x^k$ được gọi là đa thức xe của bảng con B, quy ước $r_0(B) = 1$.

Sau đây là một số tính chất quan trọng của đa thức xe thường được sử dụng:

Kết quả 1. $R_B(x) = R_{B \setminus \Delta}(x) + x R_{B-\Delta}(x)$, trong đó Δ là một ô vuông tùy ý của miền con B, $B \setminus \Delta$ là miền thu được từ B khi bỏ đi ô Δ và $B - \Delta$ là miền nhận được từ B bằng cách xóa đi hàng và cột chứa ô Δ.

Chứng minh.

Thật vậy, khi sắp xếp k quân xe lên miền B, trong đó ta đã cố định ô Δ, thì có hai trường hợp xảy ra:

Trường hợp 1: Ô Δ được sắp một quân xe. Khi đó, đối với $k-1$ quân xe còn lại ta không thể sắp cùng hàng hoặc cùng cột với Δ. Số cách sắp xếp trong trường hợp này là $r_{k-1}(B - \Delta)$.

Trường hợp 2: Ô Δ không được sắp quân xe nào. Khi đó, đối với k quân xe có thể sắp trên miền $B \setminus \Delta$. Số cách sắp xếp trong trường hợp này là $r_k(B \setminus \Delta)$.

Tổng hợp các phân tích trên ta suy: $r_k(B) = r_k(B \setminus \Delta) + r_{k-1}(B - \Delta)$.

Từ đây ta dễ dàng suy ra kết quả với hàm sinh.

Kết quả 2. $R_{B\cup B'}(x)=R_B(x)R_{B'}(x)$, trong đó B và B' là hai miền không có hàng nào cung và cột nào chung, còn $B\cup B'$ là miền bao gồm tất cả các ô vuông của B và B'.

Chứng minh.

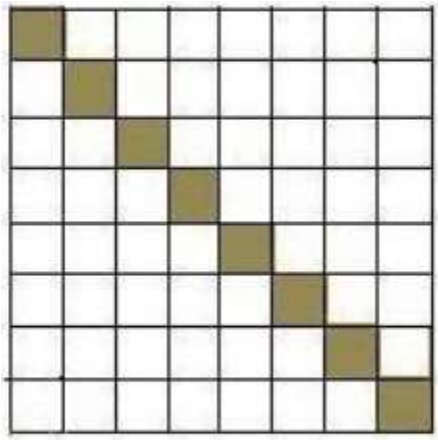
Thật vậy, vì B và B' là hai miền không có hàng nào chung và cột nào dung nên mỗi cách sắp đặt i quân xe lên B và j quân xe lên B' sẽ ứng với mỗi cách sắp đặt $i+j$ quân xe lên miền $B\cup B'$, với $i,j\geq 0$.

Vì vậy, $r_k(B\cup B')=\sum\limits_{i+j=k} r_i(B)r_j(B')$. Từ đây, nhận được kết quả dưới dạng hàm sinh.

2. Ứng dụng của đa thức xe

Bài toán 1. (Derangement problem) Tìm số các hoán vị $\sigma\in S_n$ sao cho $\sigma(i)\neq i$ với mọi $i=1,2,...,\ n$.

Lời giải. Bài toán tương đương với việc tìm số các cách sắp xếp các quân xe lên bàn cờ $n\times n$ với miền cấm chính là đường chéo của bàn cờ: $B=\{(1,1),(2,2),...,(n,n)\}$.



Rõ ràng miền này có thể được xem như là phân hoạch thành n ô vuông đôi một không cùng hàng và cùng cột. Đa thức xe của mỗi ô như vậy là $R_0(x)=1+x$.

Áp dụng Kết quả 2, ta có $R_B=(x)=\left[R_0(x)\right]^n=(1+x)^n$. Suy ra $r_k(B)=\binom{n}{k}$.

Áp dụng bài toán hoán vị với các vị trí cấm, ta thu được công thức tính số các hoán vị $\sigma\in S_n$ thỏa mãn điều kiện bài toán: $D_n=\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!=n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Bài toán 2. (Me1nage problem) Tìm số cách sắp xếp n cặp cô dâu, chú rể vào một bàn tròn $2n$ chỗ ($n\geq 2$) sao cho các cô dâu, chú rể ngồi luân phiên nhau nhưng không xảy ra trường hợp chú rể ngồi bên cạnh cô dâu của mình.

Lời giải. Đầu tiên, ta sắp n cô dâu ngồi vào bàn sao cho giữa hai cô dâu để trống một ghế dành cho một chú rể nào đó. Số cách sắp xếp như vậy bằng $2n!$.

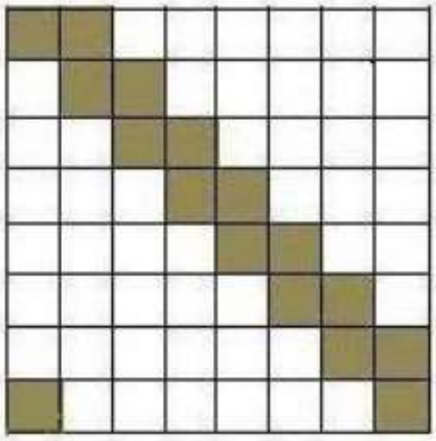
Trong mỗi cách sắp xếp các cô dâu, đánh số họ theo chiều kim đồng hồ lần lượt là $1,2,...,n$. Ghế trống bên phải cô dâu thứ i ta đánh số là i.

Bây giờ, ta xếp các chú rể vào n ghế trống này sao cho thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Giả sử chú rể của cô dâu thứ i được sắp vào ghế số $\sigma(i)\in\{1,2,...,n\}$.

Khi đó $\sigma(i)\neq i,i+1\ (\mathrm{mod}\, n)$.

Ta cho tương ứng một hoán vị $\sigma\in S_n$ ($n\geq 2$) như vậy với một cách sắp đặt các quân xe lên bàn cờ $n\times n$ với miền cấm là: $B_n=\{(1,1),(2,2),...,(n,n),(1,2),(2,3),...,(n-1,n),(n,1)\}$.



Áp dụng Kết quả 1, đối với miền ô vuông B_n khi bỏ đi ô $(n,1)$ ta được miền S_n, nếu xóa đi dòng và cột chứa ô này ta được miền S_{n-1}. Khi đó: $R_{B_n} = R_{S_n}(x) + xR_{S_{n-1}}(x)$.

Với miền S_n, ta loại đi ô $(1,1)$ được miền T_n, loại đi hàng và cột chứa ô này thu được miền S_{n-1}. Tương tự ta nhận được: $R_{S_n} = R_{T_n}(x) + xR_{S_{n-1}}(x)$.

Với miền T_n, ta loại đi ô $(1,2)$ thu được miền S_{n-1}, loại đi hàng và cột chứa ô này thu được miền T_{n-1}.

Khi đó: $R_{T_n} = R_{S_{n-1}}(x) + xR_{T_{n-1}}(x)$.

Từ các quan hệ truy hồi trên, ta rút ra được: $R_{B_{n+1}}(x) = (2x+1)R_{B_n}(x) + x^2R_{B_{n-1}}(x)$ với mọi $n = 2,3,...$.

Với các trường hợp đầu tiên, ta tính được $R_{B_2}(x) = 1+4x+2x^2$, $R_{B_3}(x) = 1+6x+9x^2+2x^3$.

Kết quả cuối cùng, ta tính được (dùng hàm sinh hoặc đa thức đặc trưng):

$$R_{B_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}x^k .$$

Áp dụng bài toán hoán vị với vị trí cấm, ta có số các hoán vị $\sigma \in S_n$ thỏa mãn điều kiện là

$$U_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!.$$

Đây là số cách sắp xếp n chú rể vào n vị trí trống như đã đánh số.

Công thức tính số cách sắp xếp các cô dâu và chủ rể thỏa mãn điều kiện bài toán là:

$$2n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{2n}{2n-k}\binom{2n-k}{k}(n-k)!$$

Tài liệu tham khảo:

[1]. Nguyễn Tuấn Minh, Lý thuyết các quân xe, Tạp chí MathVn số 2.
[2]. Nguyễn Đức Nghĩa – Nguyễn Tô Thành, Toán rời rạc, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội